Exercice I. Critères de divisibilités.
1. Démontrer qu'un nombre entier est divisible par 3 si, et seulement si, la somme de ses chiffres décimaux est divisible par 3.
2. Même question avec 9.
3. Donner un critère de divisibilité par 11.
4. Démontrer (sans trop de calculs) que 111 111 111 111 est divisible par 3, 11, 37 et 101.

Exercice II. Systèmes de numérations.
1. Écrire en binaire le nombre 43.
2. Écrire en héxadécimal le nombre 352.
3. Donner l'écriture décimale des nombres dont l'écriture binaire est `0b1001101` et dont l'écriture hexadécimale est `0x9C`.

Exercice III. Fractions.
1. Soit $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ deux fractions : $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$. On suppose de plus que $bc - ad = 1$.
a. Démontrer que les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont réduites.
b. Démontrer que
$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$
c. Démontrer que $\frac{a+c}{b+d}$ est réduite.
2. Pour deux fractions fractions réduites $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, on note $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$. Montrer que cette opération n'est pas associative.
3. En partant d'un encadrement $\frac{a}{b} < \pi < \frac{c}{d}$, l'un des deux encadrements $\frac{a}{b} < \pi < \frac{a+c}{b+d}$ ou $\frac{a+c}{b+d} < \pi < \frac{c}{d}$ est vrai. On dit qu'il est obtenu par addition des cancres.
En partant de l'encadrement $\frac{3}{1} < \pi < \frac{4}{1}$ donner les encadrements successifs de π obtenus par addition des cancres.
4. a. Soit x un nombre réel compris entre deux nombres rationnels strictement positifs $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ avec $bc - ad = 1$. Démontrer que l'un des trois nombres rationnels $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ et $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d}$, noté $\frac{p}{q}$, vérifie
$$|x - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^2\sqrt{5}}.$$
b. En déduire le théorème de Hurwitz : Étant donné un irrationnel x, il existe une infinité de nombres rationnels $\frac{p}{q}$ tels que
$$|x - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^2\sqrt{5}}.$$

Exercice IV. Développement décimal des nombres rationnels.
1. Déterminer le nombre rationnel dont l'écriture décimales est $r = 1,32323232\dots$
2. Démontrer que le déveleppoment décimal d'un nombre rationnel de la forme a/b est ultimement périodique avec une période de longueur plus petite que b. *Vous remarquerez qu'il y a au plus b restes possibles lorsqu'on effectue une division euclidienne par b.*
3. Remarquez que 99 999 est divisible par 271 et que la période de 54/271 est de longueur 5. Pourriez-vous énoncer une conjecture sur la longueur de la période en fonction des diviseurs de $999\dots99$? Sauriez-vous démontrer ce résultat ?

Exercice V. Développement décimal des nombres réels.
1. Soit x le nombre réel de partie entière 0 et dont le développement décimal ne contient que des 0 sauf les chiffres dont la position est une puissance de 2 qui sont des 1 : $x = 0,110100010000000100\dots$. Soit n un nombre entier à d chiffres. Pour $k > d+1$, quel est le $(2^k - d + 1)$-ième chiffre de nx ? En déduire que x est irrationnel.
2. On désigne par X l'ensemble des nombres réels dont le développement décimal propre contient le chiffre 9. Construire une suite convergente d'éléments de X dont la limite n'appartient pas à X.
3. a. Dessiner l'ensemble de Cantor C des nombres réels de $[0;1]$ qui admettent un développement en base 3 ne contenant pas le chiffre 1.
b. Démontrer que C est fermé.

Exercice VI. Compacité de l'intervalle $[0;1]$**.** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels entre 0 et 1. Pour chaque n, on considère l'écriture décimale de x_n :
$$x_n = 0, c_{n,1}c_{n,2}c_{n,3}\dots$$
où $c_{n,i} \in \{0;1;\dots;9\}$ est le i-ème chiffre après la virgule de x_n.
1. Construire par récurrence sur n, une fonction strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que pour tout n et pour tout $k, m \leq n$, $c_{\varphi(n),k} = c_{\varphi(m),k}$
2. Démontrer que la suite de nombres réels $x_{\varphi(n)}$ converge vers le nombre réel $y = 0, c_{\varphi(0),0}c_{\varphi(1),1}c_{\varphi(2),2}c_{\varphi(3),3}\dots$
3. Que se passe-t-il si la suite des chiffres $(c_{\varphi(n),n})_{n\in\mathbb{N}}$ est ultimement égale à 9 ?