Faculté des sciences
Université d'Aix-Marseille

Capes blanc
samedi 17 mars 2018

☐ Aix-Montperrin
☐ Luminy
☐ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert
☒ Espe

Préparation au Capes de mathématiques, master Meef, 1re année
Exercices pour un Capes blanc

Cinq heures, le sujet comporte deux parties : Analyse et géométrie.

Enseignant : T. Coulbois, R. Zarouf

Première partie : Analyse

Tout au long de ce problème la fonction φ est définie par :

$$\varphi(t) = \frac{\sin(t)}{t}, \qquad \textit{pour tout } t > 0.$$

1 Préliminaires

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction à valeurs réelles, continue sur $I = [x_0, +\infty[$. Donnez une définition (n'ayant recours qu'à des outils et notions de Terminale Scientifique) de l'assertion "f est intégrable sur I".
2. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels. Donnez une définition (n'ayant recours qu'à des outils et notions de Terminale Scientifique) de l'assertion "la série numérique de terme général u_n est convergente".
3. Démontrez que la série numérique de terme général $\frac{1}{n}$ est divergente en ayant uniquement recours à des outils et notions de Terminale Scientifique.
4. Démontrez la double inégalité : $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}],\ \frac{2}{\pi}t \leq \sin(t) \leq t$.
5. Vérifiez que φ est prolongeable par continuité sur l'intervalle $[0, 1]$.
6. Sur quelle propriété de la fonction φ, au programme des classes de Terminales Scientifiques, repose le fait que cette fonction est bien prolongeable par continuité sur l'intervalle $[0, 1]$? Démontrez cette propriété comme si vous aviez à le présenter devant une classe de Terminale Scientifique.
7. φ est-elle intégrable sur $[0, 1]$? Justifiez votre réponse.
8. Pour tout $t > 0$, on pose $f(t) = \sqrt{t+1} - \sqrt{t}$.
   (a) Précisez la forme indeterminée que présente le calcul de $\lim_{t\to+\infty} f(t)$, puis émettre une conjecture quant à la valeur de cette limite.
   (b) En mettant $\sqrt{t}$ en facteur dans l'expression qui définit $f(t)$, puis en vous inspirant de la preuve que vous aurez donnée à la question 6, montrez que $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ existe et calculez sa valeur.
   (c) Par une méthode différente de celle mise en oeuvre en 8-(b), mais qui reste accessible à un élève de Terminale Scientifique, montrez que $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ existe et calculez sa valeur.

2 Existence de $\int_0^{+\infty} \varphi(t)\, dt$

Le but de cette partie est de démontrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t)\ \mathrm{d}t$$

est convergente.

1. Pour tout $x > 1$, on définit $\phi\ :\ x \mapsto \phi(x) = \int_1^x \varphi(t)\ \mathrm{d}t$.
   Montrer que l'on a $\ :\forall x > 1,\ \phi(x) = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}\ \mathrm{d}t$.
2. Prouver que la limite de $\phi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ existe et est finie.
3. Conclure.

3 Etude de l'intégrabilité de φ sur $I = [0, +\infty)$

1. Montrez que
$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\varphi(t)| \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{k\pi + t} \mathrm{d}t.$$
2. En déduire que pour tout entier $k \geq 0$,
$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\varphi(t)| \mathrm{d}t \geq \frac{2}{(k+1)\pi}.$$
3. En utilisant la question précedente, ainsi que les questions 1.1 et 1.3, conclure quant à l'intégrabilité de φ sur $I = [0, +\infty)$.

4 Une façon de calculer la valeur de $I = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\ \mathrm{d}t$

On pose, pour tout entier $n \geq 1$
$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)\sin(2nt)}{\sin(t)}\ \mathrm{d}t$$
et
$$v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{t}\ \mathrm{d}t.$$
Le but de cette partie est de calculer la valeur de
$$I = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\ \mathrm{d}t.$$

1. Le but de cette question est de démontrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est constante.
   (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, u_n existe.
   (b) Montrer pour tout entier $n \geq 1$, v_n existe.
   (c) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$,
   $$u_{n+1} - u_n = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((2n+1)t)\cos(t)\ \mathrm{d}t.$$
   (d) Soient k et l deux entiers naturels non nuls tels que $k \neq l$. Montrer que
   $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(kt)\cos(lt)\ \mathrm{d}t = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(k+l)\right)}{2(k+l)} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(k-l)\right)}{2(k-l)}.$$
   (e) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est constante.
   (f) Calculer la valeur de u_n pour tout $n \geq 1$. (On pensera à linéariser $\cos^2(t)$.)
2. Soit h une fonction de classe C^1 sur un segment $[\alpha, \beta]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   On pose, pour tout entier $m \geq 1$,
   $$H_m = \int_\alpha^\beta h(t)e^{imt}\ \mathrm{d}t.$$
   Montrer, en utilisant une intégration par parties, que
   $$\lim_{m\to+\infty} H_m = 0.$$
3. Le but de cette question est de démontrer que la fonction h définie par
   $$h(t) = \frac{1}{t} - \frac{\cos(t)}{\sin(t)},\ \forall t \in]0, \frac{\pi}{2}]$$
   est prolongeable en une fonction de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

(a) Montrer que la fonction h est prolongeable en une fonction continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et préciser la valeur de

$$\lim_{x \to 0^+} h(x).$$

(b) Calculer $h'(t)$ pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, puis montrer que h est prolongeable en une fonction de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et préciser la valeur de

$$\lim_{x \to 0^+} h'(x).$$

4. Le but de cette question est de calculer la valeur $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{d}t$.

(a) Vérifier que pour tout entier $n \geq 1$,

$$v_n - u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(t) \sin(2nt)\, \mathrm{d}t.$$

(b) Soit h une fonction de classe C^1 sur un segment $[\alpha, \beta]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. En utilisant la question 2., calculer

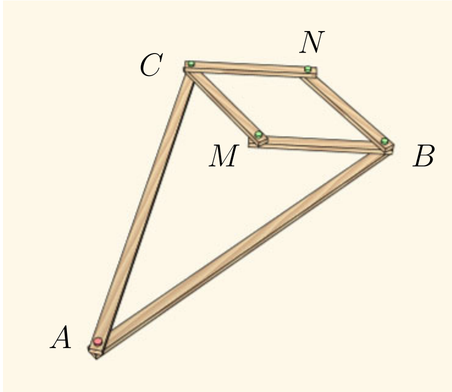
$$\lim_{m \to +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(t) \sin(mt)\, \mathrm{d}t.$$

(c) En déduire que la suite $(v_n - u_n)_{n \geq 1}$ est convergente et calculer

$$\lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n).$$

(d) Conclure en déduisant des questions précédentes la valeur de I.

Deuxième partie : Géométrie



I. L'inverseur de Peaucellier. L'instrument inventé par Charles Nicolas Peaucellier (1832-1913) transforme un mouvement rectiligne (le piston de la machine à vapeur par exemple) en un mouvement circulaire (les roues de la locomotive).
L'instrument est composé d'un point A fixe et de six tiges : les deux premières AB et AC de longueur R, les quatre autres BM, CM, BN et CN de longueur $r < R$.

1. Démontrer que les points A, M et N sont alignés.
2. Soit I le milieu commun de $[BC]$ et $[MN]$.
a. Démontrer que $\overline{AM}.\overline{AN} = AI^2 - IM^2$.
b. En déduire que $\overline{AM}.\overline{AN} = R^2 - r^2$.
3. Démontrer que si M appartient au cercle de centre A et de rayon $p = \sqrt{R^2 - r^2}$ alors M et N sont confondus.

II. Inversion par rapport à un cercle. Soit A un point du plan et $\mathcal{C}$ un cercle de centre A et de rayon p. L'inversion i par rapport au cercle $\mathcal{C}$ transforme un point M distinct de A en l'unique point $N = i(M)$ de la droite (AM) tel que $\overline{AM}.\overline{AN} = p^2$.
1. Étant donné le cercle $\mathcal{C}$ proposer une construction géométrique (c'est-à-dire à la règle et au compas) de l'inverse $N = i(M)$ en fonction du point M. Vous pourrez vous inspirer de l'instrument de Peaucellier.
2. Soit M et M' deux points du plan et $N = i(M)$ et $N' = i(M')$ leurs inverses par rapport au cercle $\mathcal{C}$.
a. Démontrer que les triangles AMN' et $AM'N$ sont semblables.
b. Démontrer que les angles $\widehat{ANM'}$ et $\widehat{MN'A}$ sont égaux.
c. En déduire que les points M, N, M' et N' sont cocycliques.
3. Soit $\mathcal{C}'$ un cercle passant par A et de diamètre $[AK]$. Soit D l'inverse de K par rapport à $\mathcal{C}$.
a. Pour tout point M du cercle $\mathcal{C}'$ d'inverse $N = i(M)$, démontrer que le triangle ADN est rectangle en D.
b. En déduire que l'image du cercle $\mathcal{C}'$ par l'inversion par rapport au cercle $\mathcal{C}$ est la droite perpendiculaire à (AC) passant par D.

III. Retour à l'inverseur de Peaucellier.
1. À l'aide des questions I et II démontrer que si le point M de l'instrument de Peaucellier parcours un cercle passant par A, alors le point N parcours une droite que l'on précisera.
2. On s'intéresse maintenant aux limites de l'instrument de Peaucellier.
a. Montrer que le point M est toujours tel que $R - r \leq AM \leq R + r$.
b. Réciproquement démontrer que le point M de l'instrument peut être placé en tout point du plan dont la distance au point fixe A est comprise entre $R - r$ et $R + r$.
c. On suppose que l'instrument est construit avec $AB = AC = 60\,\text{cm}$, et $BM = BN = CM = CN = 20\,\text{cm}$. On fait varier le point M sur un cercle $\mathcal{C}'$ passant par A et de rayon $25\,\text{cm}$. Préciser l'arc de cercle que peut décrire M ainsi que le segment que parcourt N.

IV. Forme complexe d'une inversion. On considère la fonction $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{2\bar{z}-3}{\bar{z}-2} \end{array}$.

1. a. Démontrer que $\varphi(z) = z \iff (z-2)(\bar{z}-2) - 1 = 0$.

b. Démontrer que l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe est invariante par φ est un cercle dont vous préciserez le centre et le rayon.

2. On considère de plus le point Ω d'affixe $z_\Omega = 2$. Soit M un point d'affixe z différent de Ω et N d'affixe $\varphi(z)$. Démontrer que Ω, M et N sont alignés et que $\overline{\Omega M}.\overline{\Omega N} = 1$.

3. En déduire que φ est la forme complexe d'une inversion.

4. Réciproquement on considère l'inversion i par rapport au cercle unité. Pour un point M différent de l'origine O et d'affixe z, déterminer l'affixe $\psi(z)$ de $N = i(M)$ l'image de M par l'inversion.

5. Démontrer que pour tout $z \neq \frac{-1}{2}$, $\varphi \circ \psi(z) = \frac{3z-2}{2z-1}$.

6. Déterminer le(s) point(s) fixe(s) de cette transformation $z \mapsto \varphi(\psi(z))$.