Faculté des sciences
Université d'Aix*Marseille

Devoir surveillé
samedi 10 février 2018

☐ Aix-Montperrin
☐ Luminy
☐ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert
☒ Espe

Préparation au Capes de mathématiques, master Meef, 1re année
Thème 3.5 : Constructions géométriques

Quatre heures, ni calculatrices ni documents

Enseignant : T. Coulbois

Exercice I. Dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé, on considère la droite d'équation $\mathcal{D} : 3x - y + 6 = 0$.

1. Pour un point $M(x; y)$ déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de $M' = p(M)$ de M sur la droite $\mathcal{D}$.

2. Démontrer que les coordonnées du symétrique orthogonal $M''(x''; y'')$ de M par rapport à la droite $\mathcal{D}$ vérifient :

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{2}{5}\begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3. Donner les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice II. Dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé, on considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(1; 2)$ et de rayon 5.

1. Déterminer une équation de la tangente au cercle $\mathcal{C}$ passant par le point $B(12, 0)$.

2. On considère une droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$. À quelle(s) condition(s) la droite $\mathcal{D}$ est-elle tangente au cercle $\mathcal{C}$?

Exercice III. **1.** Déterminer l'ensemble des points du plan dont l'affixe z est telle que $\dfrac{z-i}{z-1}$ est un nombre réel.

2. Déterminer l'ensemble des points du plan dont l'affixe z est telle que $\dfrac{z-i}{z-1}$ est un nombre imaginaire pur.

Vous traiterez ensuite le second problème du sujet de 2002 du Capes interne.