Quatre heures, ni calculatrices ni documents

Enseignant : T. Coulbois

Exercice I. Dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé, on considère la droite d'équation $\mathcal{D} : 3x - y + 6 = 0$.

1. Pour un point $M(x; y)$ déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de $M' = p(M)$ de M sur la droite $\mathcal{D}$.

M' est déterminé par deux conditions : $M' \in \mathcal{D}$ et le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est normal à $\mathcal{D}$ (donc à son vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$). Les coordonnées $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ vérifient donc :

$$\begin{cases} 3x' - y' + 6 = 0 \\ (x' - x) + 3(y' - y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y' = 3x' + 6 \\ x' - x + 3((3x' + 6) - y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x' = \frac{1}{10}(x + 3y - 18) \\ y' = \frac{3}{10}(x + 3y + 2) \end{cases}$$

2. Démontrer que les coordonnées du symétrique orthogonal $M''(x''; y'')$ de M par rapport à la droite $\mathcal{D}$ vérifient :

$$\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-4 & 3\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \frac{2}{5}\begin{pmatrix}-9\\3\end{pmatrix}$$

Le symétrique M'' de M par rapport à $\mathcal{D}$ est caractérisé par le fait que $M' = p(M)$ est le milieu de $[MM'']$, donc $\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{MM'}$. En coordonnées nous obtenons :

$$\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 2(\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}) \iff \begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Et en utilisant nos calculs de la question précédente :

$$\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}\frac{1}{10}(x + 3y - 18)\\ \frac{3}{10}(x + 3y + 2)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{5}(x + 3y - 18) - x\\ \frac{3}{5}(x + 3y + 2) - y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{5}(-4x + 3y - 18)\\ \frac{1}{5}(3x + 4y + 6)\end{pmatrix}$$

nous obtenons l'égalité proposé :

$$\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-4 & 3\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \frac{2}{5}\begin{pmatrix}-9\\3\end{pmatrix}.$$

3. Donner les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-4 & 3\\3 & 4\end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique est

$$\frac{1}{25}\begin{vmatrix}-4 - 5\lambda & 3\\3 & 4 - 5\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 \text{ (attention au coefficient } \frac{1}{5})$$

Les valeurs propres sont donc 1 et -1, cette matrice est diagonalisable et les sous-espaces propres sont les droites vectorielles d'équations :

$\underline{E_1}$: $-9x + 3y = 0 \iff y = 3x$ un vecteur propre est donc $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

$\underline{E_{-1}}$: $x + 3y = 0$ un vecteur propre est donc $\vec{u}_{-1} = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$.

Nous reconnaissons que u_1 est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ et que u_{-1} est un vecteur normal à $\mathcal{D}$.

Exercice II. Dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé, on considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(1; 2)$ et de rayon 5.

1. Déterminer une équation de la tangente au cercle $\mathcal{C}$ passant par le point $B(12, 0)$.

Une figure très soigneuse et précise nous permet de constater qu'une tangente au cercle $\mathcal{C}$ passant par B est tangente au point $T\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$.

Ce que nous pouvons vérifier en caculant la distance, les coordonnées et le produit scalaire :

$$AT = \sqrt{(4-1)^2+(6-2)^2} = 5, \overrightarrow{AT}\begin{pmatrix}4-1\\6-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \overrightarrow{BT}\begin{pmatrix}4-12\\6-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\6\end{pmatrix}, \overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{BT} = 3\times(-8)+4\times 6 = 0,$$

ce qui démontre que T est bien un point du cercle $\mathcal{C}$ et que la droite (BT) est perpendiculaire au rayon (AT) c'est donc bien une tangente au cercle $\mathcal{C}$.

Il y a deux tangentes au cercle $\mathcal{C}$ passant par B, elles sont symétriques par rapport à la droite (AB). Le symétrique T' par rapport à la droite (AB) a pour coordonnées (x', y') et en considérant le milieu de $[TT']$, nous calculons :

$$(AB) : 2x+11y = 24, 2(\frac{1}{2}(x'+4))+11(\frac{1}{2}(y'+6)) = 24, \overrightarrow{TT'}\begin{pmatrix}x'-4\\y'-6\end{pmatrix}, 0 = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{TT'} = 11(x'-4)-2(y'-6)$$

Nous avons donc le système d'équation

$$\begin{cases}2x'+11y' = -26\\11x'-2y' = 32\end{cases} \iff \begin{cases}x' = \frac{12}{5}\\y' = \frac{-14}{5}\end{cases}$$

Nous concluons en donnant les équations des tangentes au cercle $\mathcal{C}$ passant par B :

(BT) : vecteur directeur $\overrightarrow{BT}\begin{pmatrix}-8\\6\end{pmatrix}$, équation $3x-4y = 3\times 12 = 36$.

(BT') : vecteur directeur $-\frac{5}{2}\overrightarrow{BT'}\begin{pmatrix}24\\7\end{pmatrix}$, équation $7x-24y = 7\times 12 = 84$.

<u>Et si notre figure n'est pas assez soignée ?</u> Il faut alors se lancer dans les calculs.

Soit $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un point du cercle $\mathcal{C}$ tel que la droite (BT) est tangente à $\mathcal{C}$. Alors la droite (BT) est perpendiculaire au rayon (AT) nous pouvons donc écrire les équations :

$$\begin{cases}T\in\mathcal{C}\\(AT)\perp(BT)\end{cases} \iff \begin{cases}AT^2 = 25\\\overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{BT} = 0\end{cases} \iff \begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2 = 25\\(x-1)(x-12)+(y-2)y = 0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x^2-2x+y^2-4y = 20\\x^2-13x+y^2-2y = -12\end{cases} \iff \begin{cases}x^2-2x+y^2-4y = 20\\11x-2y = 32 \quad (L1-L2)\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x^2-2x+(\frac{11}{2}x-16)^2-4(\frac{11}{2}x-16) = 20\\11x-2y = 32 \quad (L1-L2)\end{cases}$$

L'équation du second degré de la première ligne est

$$\frac{125}{4}x^2-200x+300 = 0 \iff 5x^2-8x+12 = 0$$

dont les solutions sont $x = 4$ et $x = \frac{12}{5}$. Nous trouvons donc deux points $T\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$ et $T'\begin{pmatrix}\frac{12}{5}\\\frac{-14}{5}\end{pmatrix}$ et nous pouvons calculer les équations des tangentes (BT) et (BT') comme ci-dessus.

2. On considère une droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax+b$ où $a, b\in\mathbb{R}$. À quelle(s) condition(s) la droite $\mathcal{D}$ est-elle tangente au cercle $\mathcal{C}$?

Les coordonnées des intersections $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ de la droite $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ vérifient :

$$\begin{cases}M\in\mathcal{D}\\M\in\mathcal{C}\end{cases} \iff \begin{cases}y = ax+b\\(x-1)^2+(y-2)^2 = 25\end{cases} \iff \begin{cases}y = ax+b\\(x-1)^2+(ax+b-2)^2 = 25\end{cases}$$

L'équation du second degré de la deuxième ligne est

$$(1+a^2)x^2+2(a(b-2)-1)x+(b-2)^2-24 = 0$$

dont le discriminant (réduit) est $\Delta' = (a(b-2)-1)^2-((b-2)^2-24)(1+a^2)$. La droite $\mathcal{D}$ est tangente au cercle $\mathcal{C}$ si, et seulement si, ils ont exactement un point d'intersection et donc si, et seulement si, le discriminant Δ' est nul :

$$(a(b-2)-1)^2-((b-2)^2-24)(1+a^2) = 0 \iff 24a^2-b^2-2ab+4a+4b+21 = 0$$

Exercice III. **1.** Déterminer l'ensemble des points du plan dont l'affixe z est telle que $\dfrac{z-i}{z-1}$ est un nombre réel.

Posons $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $z \neq 1$ et calculons :

$$\frac{z-i}{z-1} = \frac{a+ib-i}{a+ib-1} = \frac{(a+ib-i)(a-1-ib)}{(a-1)^2+b^2}$$

Le dénominateur est un nombre réel (strictement positif). La partie imaginaire du numérateur est $-ab+(a-1)(b-1) = 1-a-b$.

Le nombre $\dfrac{z-i}{z-1}$ est un nombre réel si, et seulement si $a+b=1$ et $z \neq 1$. L'ensemble des points du plan dont l'affixe z est telle que $\dfrac{z-i}{z-1}$ est un nombre réel est donc la droite d'équation $a+b=1$ privé du point $(a,b) = (1,0)$.

2. Déterminer l'ensemble des points du plan dont l'affixe z est telle que $\dfrac{z-i}{z-1}$ est un nombre imaginaire pur.

La partie réelle du numérateur calculé ci-dessus est

$$a(a-1) + (b-1)b = (a - \frac{1}{2})^2 + (b - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}$$

L'ensemble des points du plan dont l'affixe z est telle que $\dfrac{z-i}{z-1}$ est un nombre réel est donc le cercle d'équation $(a-\frac{1}{2})^2 + (b-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ c'est-à-dire le cercle de centre $\Omega \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$ privé du point $(a,b) = (1,0)$.

Vous traiterez ensuite le second problème du sujet de 2002 du Capes interne.