

Exercice I. 1. Démontrer que par trois points non-alignés du plan euclidien il passe exactement un cercle.

2. Le plan euclidien est muni d'un repère orthonormé. On considère les points $A(5, 5)$, $B(-1, 5)$ et $C(-2, -2)$.

a. Démontrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.

b. Déterminer le cercle passant par A , B et C .

3. Démontrer que le cercle de centre $D(4, 2)$ et de rayon $5 - \sqrt{5}$ est tangent au cercle de la question précédente.

Exercice II. Le plan euclidien est muni d'un repère orthonormé. On considère les points $A(5, 5)$, $B(-1, 5)$ et $C(-2, 2)$. On considère l'homothétie $h = h_{A, \frac{1}{2}}$ de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$ et $h' = h_{B, 3}$ l'homothétie de centre B et de rapport 3.

1. Déterminer la nature de la transformation $h' \circ h$. Préciser ses éléments géométriques.

2. On considère l'homothétie $h'' = h_{C, 2}$ de centre C et de rapport 2. Déterminer la nature de la transformation $h'' \circ h$. Préciser ses éléments géométriques.

3. Soit f une transformation du plan et $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que pour tout points M et N du plan

$$\overrightarrow{f(M)f(N)} = \lambda \overrightarrow{MN}$$

Démontrer que f est soit une homothétie, soit une translation.

4. On considère $\mathcal{H}$ l'ensemble des homothéties du plan et $\mathcal{T}$ l'ensemble des translations du plan.

a. Démontrer que $\mathcal{T}$ est un groupe commutatif.

b. Démontrer que $\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$ est un groupe.

Vous traiterez ensuite le Problème 1 du sujet de 2014 du Capes.