

Exercice I. 1. Démontrer que par trois points non-alignés du plan euclidien il passe exactement un cercle.

Soit A, B et C trois points non-alignés du plan (en particulier ils sont deux à deux distincts). Soit $\mathcal{D}$ la médiatrice du segment $[AB]$ et $\mathcal{D}'$ celle du segment $[AC]$. Les droites (AB) et (AC) sont sécantes donc leurs perpendiculaires $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont aussi sécantes en un point Ω . Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre Ω passant par A . Alors $\mathcal{C}$ passe par A, B et C . En effet la médiatrice $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points équidistants de A et B donc $\Omega A = \Omega B$ et de même $\Omega A = \Omega C$. Par transitivité $\Omega A = \Omega B = \Omega C$ et cette distance est le rayon de $\mathcal{C}$.

Démontrons maintenant que ce cercle est unique. Soit $\mathcal{C}'$ un autre cercle passant par A, B et C et soit Ω' son centre. Alors $\Omega' A = \Omega' B = \Omega' C$ et cette longueur est le rayon de $\mathcal{C}'$. Nous en déduisons que Ω' est un point commun des médiatrices $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ (et de la médiatrice de $[BC]$). Nous avons démontré que les médiatrices $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes en Ω , donc $\Omega = \Omega'$. Finalement le rayon de $\mathcal{C}'$ est $\Omega' A = \Omega A$ et est égal au rayon de $\mathcal{C}$. Les cercles $\mathcal{C}$ ont même centre et même rayon ils sont donc égaux.

Nous avons donc montré l'existence et l'unicité du cercle $\mathcal{C}$ qui passe par les trois points non-alignés A, B et C .

2. Le plan euclidien est muni d'un repère orthonormé. On considère les points $A(5, 5)$, $B(-1, 5)$ et $C(-2, -2)$.

a. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Un rapide calcul nous donne les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB} : \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} : \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \end{pmatrix}$. Ces vecteurs ne sont donc pas colinéaires (le déterminant est $-6 \times (-7) - 0 \times (-7) = 42 \neq 0$) et les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. Déterminer le cercle passant par A, B et C .

Plusieurs méthodes sont possible.

1/ Si la figure est faite soigneusement, on peut y lire que le centre du cercle est le point $\Omega : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et on peut vérifier par le calcul que

$$\Omega A = \sqrt{(5-2)^2 + (5-1)^2} = 5 = \Omega B = \sqrt{(2-(-1))^2 + (1-5)^2} = \Omega C = \sqrt{(2-(-2))^2 + (1-(-2))^2}$$

Donc le cercle de centre $\Omega : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et de rayon 5 passe par les points A, B et C .

2/ Deuxième méthode : Soit $I : \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ le milieu de $[AB]$. La médiatrice $\mathcal{D}$ de $[AB]$ est la droite orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ passant par I . Un point $M : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{D}$ si, et seulement si,

$$\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \iff (x-2) \times (-6) + (y-5) \times 0 = 0 \iff x = 2.$$

De même en considérant le milieu $J : \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ de $[AC]$, la médiatrice $\mathcal{D}'$ de $[AC]$ a pour équation

$$(x - \frac{3}{2}) \times (-7) + (y - \frac{3}{2}) \times (-7) = 0 \iff x + y - 3 = 0.$$

Nous obtenons donc que le point Ω d'intersection de ces deux médiatrices a pour coordonnées $\Omega : (2, 1)$.

Nous pouvons alors calculer le rayon du cercle qui est la distance commune $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \sqrt{(5-2)^2 + (5-1)^2} = 5$. Donc le cercle de centre $\Omega : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et de rayon 5 passe par les points A, B et C .

3. Démontrer que le cercle de centre $D(4, 2)$ et de rayon $5 - \sqrt{5}$ est tangent au cercle de la question précédente.

Nous constatons que $\Omega D + (5 - \sqrt{5}) = \sqrt{(4-2)^2 + (2-1)^2} + (5 - \sqrt{5}) = 5$, les deux cercles sont donc tangents. Le point de tangence T est le point de la demi-droite $[\Omega D)$ tel que $\Omega T = 5$. Un rapide calcul nous donne $T : \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Autre méthode : Par le calcul, nous savons que le coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ des points d'intersections des deux cercles vérifient :

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 = 25 \\ (x-4)^2 + (y-2)^2 = (5-\sqrt{5})^2 = 30 - 10\sqrt{5} \end{cases}$$

Réolvons ce système d'équation :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 = 25 \\ 4x + 2y = 10\sqrt{5} \quad (L1 - L2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + ((5+5\sqrt{5}-2x)-1)^2 = 25 \\ y = 5 + 5\sqrt{5} - 2x \end{cases}$$

Réolvons l'équation de degré 2 de la première ligne :

$$5x^2 - 4(1+5+5\sqrt{5}-1)x + 4 + (4+5\sqrt{5})^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 - 4(1+\sqrt{5})x + 24 + 8\sqrt{5} = 0$$

le discriminant (réduit) est $\Delta' = 4(1+\sqrt{5})^2 - (24+8\sqrt{5}) = 0$ l'équation a donc une unique racine double $x = 2(1+\sqrt{5})$ et les cercles ont un unique point commun $T \begin{pmatrix} 2(1+\sqrt{5}) \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}$: ils sont tangents.

Exercice II. Le plan euclidien est muni d'un repère orthonormé. On considère les points $A(5, 5)$, $B(-1, 5)$ et $C(-2, 2)$. On considère l'homothétie $h = h_{A, \frac{1}{2}}$ de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$ et $h' = h_{B, 3}$ l'homothétie de centre B et de rapport 3.

1. Déterminer la nature de la transformation $h' \circ h$. Préciser ses éléments géométriques.

Cherchons un point fixe Ω de $h' \circ h$: $h'(h(\Omega)) = \Omega$ et soit $\Omega' = h(\Omega)$. Alors par définition des homothéties :

$$\overrightarrow{A\Omega'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{B\Omega'} = 3\overrightarrow{B\Omega} = 3(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A\Omega'}) = 3\overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{A\Omega},$$

cette condition est équivalente à

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A\Omega} = 3\overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{A\Omega} \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega} = 4\overrightarrow{AB}.$$

Ce qui démontre que $h' \circ h$ possède un unique point fixe défini par $\overrightarrow{A\Omega} = 4\overrightarrow{AB}$ et donc de coordonnées $\Omega \begin{pmatrix} -19 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Pour tout point M du plan et d'images $M' = h(M)$ et $M'' = h'(M')$, nous obtenons :

$$\overrightarrow{AM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM''} = 3\overrightarrow{BM'}.$$

En introduisant le point Ω grâce à la relation de CHASLES

$$\overrightarrow{B\Omega} + \overrightarrow{\Omega M''} = 3(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM'}) = 3\overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{A\Omega} + \frac{3}{2}\overrightarrow{\Omega M}$$

Et nous en déduisons

$$\overrightarrow{\Omega M''} = \frac{3}{2}\overrightarrow{\Omega M}.$$

Ce qui démontre que $h' \circ h$ est l'homothétie de centre $\Omega \begin{pmatrix} -19 \\ 5 \end{pmatrix}$ et de rapport $\frac{3}{2}$.

2. On considère l'homothétie $h'' = h_{C, 2}$ de centre C et de rapport 2. Déterminer la nature de la transformation $h'' \circ h$. Préciser ses éléments géométriques.

Soit M un point du plan et $M' = h(M)$ et $M'' = h''(M')$ ses images. Alors par définition des homothéties, nous calculons successivement,

$$\overrightarrow{AM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{CM''} = 2\overrightarrow{CM'} = 2(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM'}) = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM},$$

donc $\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA'}$.

Ce qui caractérise la translation de vecteur $2\overrightarrow{CA}$. La transformation $h'' \circ h$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{CA}$ dont les coordonnées sont $2\overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \end{pmatrix}$

3. Soit f une transformation du plan et $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que pour tout points M et N du plan

$$\overrightarrow{f(M)f(N)} = \lambda \overrightarrow{MN}$$

Démontrer que f est soit une homothétie, soit une translation.

Soit M un point du plan et $M' = f(M)$ son image par f . Cherchons les points fixes Ω de la transformation f .

$$f(\Omega) = \Omega \iff \overrightarrow{M'\Omega} = \lambda \overrightarrow{M\Omega} \iff \overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{M\Omega} = \lambda \overrightarrow{M\Omega} \iff \overrightarrow{M'M} = (\lambda - 1) \overrightarrow{M\Omega}.$$

Nous devons donc distinguer plusieurs cas.

Si $\lambda \neq 1$: alors f possède un unique point fixe Ω défini par $\overrightarrow{M\Omega} = \frac{1}{\lambda-1} \overrightarrow{M'M}$. Et pour tout point N du plan d'image $N' = f(N)$ la condition vérifiée par f nous donne :

$$\overrightarrow{\Omega N'} = \lambda \overrightarrow{\Omega N}.$$

Ce qui caractérise l'homothétie de centre Ω et de rapport λ . Nous avons donc démontré que si $\lambda \neq 1$, f est une homothétie de rapport λ dont le centre est défini par $\overrightarrow{M\Omega} = \frac{1}{\lambda-1} \overrightarrow{M'M}$ pour tout point M d'image $M' = f(M)$.

Si $\lambda = 1$: alors l'égalité $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{MN}$ implique $\overrightarrow{Mf(M)} = \overrightarrow{Nf(N)}$. Fixant le point M dans le plan et en posant $\vec{u} = \overrightarrow{Mf(M)}$, l'égalité ci-dessus pour tout point N du plan, caractérise la transformation f comme étant la translation de vecteur $\vec{u}$.

Nous avons donc démontré que f est soit une homothétie (si $\lambda \neq 1$) ou une translation (si $\lambda = 1$).

4. On considère $\mathcal{H}$ l'ensemble des homothéties du plan et $\mathcal{T}$ l'ensemble des translations du plan.

a. Démontrer que $\mathcal{T}$ est un groupe commutatif.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$ et $t_{\vec{v}}$ celle de vecteur $\vec{v}$. Soit M un point du plan, $M' = t_{\vec{u}}(M)$ et $M'' = t_{\vec{v}}(M')$. Alors par définition des translations :

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}, \overrightarrow{M'M''} = \vec{v}$$

et donc la relation de CHASLES nous donne

$$\overrightarrow{MM''} = \vec{u} + \vec{v},$$

ce qui prouve que la transformation $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$ qui transforme M en M'' est la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$:

$$t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}.$$

Comme le plan vectoriel muni de l'addition est un groupe commutatif, nous en déduisons que $\mathcal{T}$ est un groupe commutatif (isomorphe au plan vectoriel) :

$$t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}+\vec{v}} = t_{\vec{v}+\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}},$$

$$t_{-\vec{u}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}-\vec{u}} = t_{\vec{0}} = id.$$

b. Démontrer que $\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$ est un groupe.

Soit f une transformation du plan alors, d'après la question 3. et la définition des translations et des homothéties, $f \in \mathcal{H} \cup \mathcal{T}$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tous points M et N du plan, $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \lambda \overrightarrow{MN}$.

Soit maintenant $f, g \in \mathcal{H} \cup \mathcal{T}$ et λ et μ les coefficients donnés ci-dessus. Alors pour tous points M et N du plan :

$$\overrightarrow{f(M)f(N)} = \lambda \overrightarrow{MN}, \quad \overrightarrow{g(f(M))g(f(N))} = \mu \overrightarrow{f(M)f(N)} = \lambda \mu \overrightarrow{MN}.$$

En utilisant la question 3. nous avons démontré que $g \circ f$ est une transformation du plan qui est dans $\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$. La composition est donc une loi interne pour $\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$.

Les homothéties et les translations sont des bijections du plan et leurs bijections réciproques sont des homothéties et des translations (respectivement). La composition est bien sûr associative.

Nous avons donc démontré que $\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$ est un groupe.

Vous traiterez ensuite le Problème 1 du sujet de 2014 de la session exceptionnelle du Capes.