

Colles : Espaces de matrices

Exercice I. 1. Démontrer que deux normes équivalentes définissent les mêmes suites convergentes, les mêmes limites, les mêmes fonctions continues.

2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un k -espace vectoriel normé ($k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit pour tout $x, y \in E$, $d(x, y) = \sqrt{\|x - y\|}$. Démontrer que la distance induite par la norme $\|\cdot\|$ et d ne sont pas équivalentes, mais définissent la même topologie.

3. Démontrer que $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ définit une norme d'algèbre sur $M_n(k)$.

Exercice II. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites réelles ou complexes. Démontrer que si la série $\sum u_n$ converge et la série $\sum v_n$ est absolument convergente, alors la série produit de CAUCHY $\sum w_n$ avec $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$ converge.

Exercice III. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = \cosh(x)$.

Exercice IV. Résoudre l'équation différentielle $y'' + 4y' + 5y = e^{-2x} \sin(x)$.

Exercice V. Résoudre l'équation différentielle $y' + y = \arctan(e^x)$.

Exercice VI. Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, on note $\rho(A)$ le plus grand des modules des valeurs propres de A .

1. pour $\|\cdot\|$ une norme d'algèbre, démontrer que $\|A\| \geq \rho(A)$.

2. Soit $\epsilon > 0$, démontrer qu'il existe une norme d'algèbre $\|\cdot\|$ (qui peut dépendre de A) telle que $\|A\| \leq \rho(A) + \epsilon$.

3. Démontrer que $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ converge $\iff \lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0 \iff \rho(A) < 1$.

4. En déduire que $\rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$.

Exercice VII. 1. Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de la matrice compagnon

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ calculer $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}^n$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Exercice VIII. 1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ calculer $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n$. **2.** Calculer de même $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^n$.

Exercice IX. Calculer la différentielle du déterminant (vous pourrez commencer par calculer les dérivées partielles par rapport à chaque coefficient).

Exercice X. soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{S}^1 = \{u \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ continue. Démontrer qu'il existe une fonction continue $g : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in [0; 1]$, $f(t) = e^{ig(t)}$.

Exercice XI. Pour $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ on définit $\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^tAB)$.

1. Démontrer que c'est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.
 2. Donner une bases orthonormée.
 3. Calculer $\|\text{tr}\|$ pour la norme induite par ce produit scalaire.
 4. Est-ce une norme d'algèbre ?
-

Exercice XII. Pour $A \in M_n(k)$, la représentation adjointe est définie par $\text{ad}_A : M_n(k) \rightarrow M_n(k)$, $X \mapsto \text{ad}_A(X) = AX - XA$.

1. Vérifier que ad_A est une application linéaire.
 2. Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ quelles sont les valeurs propres et les vecteurs propres de ad_A ?
 3. Même question pour $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
 4. On revient au cas général $A \in M_n(k)$. Soit u un vecteur propre de A et v un vecteur propre de tA respectivement associés aux valeurs propres λ et μ . Démontrer que $u \cdot {}^t v$ est un vecteur propre de ad_A .
 5. Pour N une matrice nilpotente, démontrer que ad_N est nilpotente et déterminer son indice de nilpotence en fonction de celui de N .
 6. Déterminer le spectre de ad_A en fonction de celui de A .
-

Exercice XIII. Soit $A \in M_n(k)$, déterminer $\lim_{k \rightarrow \infty} (I_n + \frac{1}{k}A)^k$.

Exercice XIV. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

On pourra commencer par résoudre le système $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ en remarquant que $z - x - y$ est une fonction constante.

Exercice XV. 1. Calculer les termes généraux des suites définies par $\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \\ u_0 = 1, u_1 = 1 \end{cases}$ (suite de FIBONACCI)

et $\begin{cases} v_{n+2} = v_{n+1} + v_n \\ v_0 = 2, v_1 = 1 \end{cases}$

2. Démontrer que pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, **a.** $2u_{m+n} = u_m v_n + u_n v_m$ et **b.** $|5u_n^2 - v_n^2| = 4$.
3. Démontrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que $u_n | u_{kn}$.
4. Démontrer que pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, $u_m \wedge u_n = u_{m \wedge n}$.