

Exercice I. Choisissez votre norme favorite sur l'espace des polynômes. La dérivation y est-elle continue ?

Exercice II. Théorème de RIESZ. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé dont la boule unité (fermée) B est compact.

1. Démontrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n \in E$ tels que $B \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(a_i, \frac{1}{2})$.

On considère V le sous-espace vectoriel engendré par a_1, \dots, a_n et on se propose de démontrer que $V = E$ en raisonnant par l'absurde. On suppose donc qu'il existe $x \in E$ tel que $x \notin V$.

2. Démontrer que $d(x, V) > 0$. On pose désormais $\epsilon = d(x, V)$.

3. Démontrer qu'il existe $y \in V$ tel que $d(x, V) = \|x - y\|$. On pose $z = \frac{1}{\|x-y\|}(x - y)$.

4. Démontrer qu'il existe $i = 1, \dots, n$ tel que $\|z - a_i\| \leq \frac{1}{2}$.

5. Établir que $\|x - y\| \cdot \|z - a_i\| \geq \epsilon$ et conclure à une contradiction.

6. Conséquences. Démontrer que dans un espace vectoriel normé de dimension infinie :

a. aucune sphère n'est compacte.

b. tout compact est d'intérieur vide.

Exercice III. Distance d'un point à une droite. Soit E un espace vectoriel normé et $\varphi \in L_c(E, \mathbb{R})$, $\varphi \neq 0$. Démontrer que pour tout $x \in E$, $d(x, \ker(\varphi)) = \frac{|\varphi(x)|}{\|\varphi\|}$

Soit $y \in \ker \varphi$, alors $\varphi(x - y) = \varphi(x)$ et $\frac{|\varphi(x-y)|}{\|x-y\|} \leq \|\varphi\|$. En inversant l'inégalité $\|x - y\| \geq \frac{|\varphi(x-y)|}{\|\varphi\|} = \frac{|\varphi(x)|}{\|\varphi\|}$. En passant à la borne inférieure en faisant varier y nous obtenons $d(x, \ker(\varphi)) \geq \frac{|\varphi(x)|}{\|\varphi\|}$. Réciproquement pour $\epsilon > 0$, il existe $z \in E$ tel que $\frac{|\varphi(z)|}{\|z\|} \geq \|\varphi\|(1 - \epsilon)$. Posons $y = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(z)}z$, alors $y \in \ker(\varphi)$ et $d(x, \ker(\varphi)) \leq \|x - y\| = \frac{|\varphi(x)|}{|\varphi(z)|}\|z\|$ et en utilisant l'inégalité initiale $\|\varphi\|$, $d(x, \ker(\varphi)) \leq \frac{|\varphi(x)|}{(1-\epsilon)\|\varphi\|}$. Nous pouvons maintenant faire tendre ϵ vers 0 pour obtenir la deuxième inégalité puis l'égalité.
Remarque : Nous n'avons pas démontré la finitude, des deux quantités, ni que ces bornes inférieures sont atteintes. C'est un bon exercice.

Exercice IV. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $M_n(\mathbb{C})$ de la norme définie par $N(A) = \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$. Calculer $\|f\|$ où $f : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ est définie par $f(A) = \text{tr}(A)$.

Pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$,

$$|\text{tr}(A)| = \left| \sum_{i=1}^n a_{ii} \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_{ii}| \leq \sum_{i=1}^n \sup_j |a_{ij}| \leq n \sup_j |a_{jj}| \leq n \sup_j \sum_{k=1}^n |a_{jk}| = nN(A).$$

Nous avons donc démontré que $\|f\| \leq n$. Réciproquement pour la matrice $A = I_n$ identité, $\text{tr}(A) = n$ et $N(A) = 1$. Nous avons ainsi démontré que $\|f\| = n$.

Exercice V. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et N une norme sur l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), N(AB) \leq CN(A)N(B).$$

Exercice VI. Dans cet exercice $k = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. a. Démontrer que $GL_n(k)$ est dense dans $M_n(k)$.

b. En déduire que pour deux matrices $A, B \in M_n(k)$, les polynômes caractéristiques de AB et BA sont égaux.

c. Quelle relation pouvez-vous établir entre χ_{AB} et χ_{BA} lorsque A et B sont rectangulaires ?

Soit $A \in M_{m,n}(k)$ (m lignes, n colonnes) avec $m \leq n$. La matrice AB est une matrice carrée $m \times m$ alors que la matrice BA est une matrice carrée $n \times n$. Remarquons que la matrice BA est de rang au plus m .
 Par exemple pour $m = 1$, $AB = (\sum_{i=1}^n a_i b_i)$ et son polynôme caractéristique est $(-1)(X - \sum_{i=1}^n a_i b_i)$ la matrice BA est une matrice $n \times n$ de rang au plus 1, son polynôme caractéristique est donc de la forme $(-1)^n (X^n - \text{tr}(BA)X^{n-1})$ et le calcul de la trace nous donne : $\chi_{BA}(X) = (-1)^{n-1} X^{n-1} \chi_{AB}(X)$.
 Soit maintenant λ une valeur propre non-nulle de AB et X un vecteur propre associé. Alors $BABX = \lambda BX$ donc BX qui est non nul, est un vecteur propre de BA associé à la valeur propre λ .
 Nous avons démontré que toute valeur propre non-nulle de AB est une valeur propre de BA .
 En particulier si AB possède m valeurs propres deux à deux distinctes et non-nulles alors, BA possède ces mêmes valeurs propres. BA possède aussi la valeur propre 0 de multiplicité $n - m$. Ainsi, dans ce cas, nous connaissons toutes les valeurs propres de AB et BA et nous pouvons écrire (en tenant compte du signe du coefficient dominant) $\chi_{BA}(X) = (-1)^{n-m} X^{n-m} \chi_{AB}(X)$.
 Pour le cas général, nous pouvons nous placer dans la clôture algébrique du corps des fractions rationnelles sur les variables a_i et b_j . Dans ce corps la matrice AB est diagonalisable et possède m valeurs propres non-nulles deux à deux distinctes (car il existe au moins un corps et des valeurs a_i et b_j dans ce corps pour lesquelles cela est vrai), le résultat précédent s'applique, c'est une égalité qui se spécialise pour toutes valeurs a_i et b_j dans tout corps.

2. Montrer qu'il existe une base de $M_n(k)$ formée de matrices inversibles.
3. Démontrer que pour toute norme d'algèbre $\| \cdot \|$ sur $M_n(k)$, pour toute matrice A et pour toute valeur propre λ de A , $|\lambda| \leq \|A\|$.
4. Démontrer qu'il n'y a pas de normes sur $M_n(k)$ telle que pour toutes matrices $A \in M_n(k)$ et $P \in GL_n(k)$, $\|P^{-1}AP\| = \|A\|$.
5. Démontrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $M_n(\mathbb{C})$. Et dans $M_n(\mathbb{R})$?

Exercice VII. Décrire le mouvement d'un pendule pesant au voisinage de la verticale en l'absence de frottements (on remarquera notamment que la période d'oscillation ne dépend pas du poids), puis en présence de frottements proportionnels à la vitesse.

- Exercice VIII.** Résoudre les équations différentielles :
1. $y' + y = \sin x$,
 2. $y'' + 2y' + y = 2x^2 \sinh x$,
 3. $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{\sqrt{x^2 + 1}}$,
 4. $xy' - 2y = x$,
 5. $(1 - x^2)y' + xy = 0$,
 6. $4xy'' + 2y' - y = 0$ (changement de variable $t = \sqrt{|x|}$).

Exercice IX. 1. Résoudre le système d'équations différentielles : $\begin{cases} x'' + 3y' - 4x + 6y = 0 \\ y'' + x' - 2x + 4y = 0 \end{cases}$

2. Résoudre l'équation différentielle $\begin{vmatrix} y'' & y' & y \\ y & y'' & y' \\ y' & y & y'' \end{vmatrix} = 0$.

3. Soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Résoudre $y'' + \omega^2 y = f$.

4. Pour $\epsilon > 0$ on considère $f = g_\epsilon : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{t}{\epsilon} & \text{si } 0 \leq t \leq \epsilon \\ 1 & \text{si } t \geq \epsilon \end{cases}$ et y_ϵ la solution de l'équation différentielle précédente.

Étudier $\epsilon \mapsto y_\epsilon$ lorsque ϵ tend vers 0.

Exercice X. 1. Que savez-vous de la suite de FIBONACCI (terme général, limite des rapports, co-primauté de deux termes consécutifs,...) ?

2. Étudier les suites définies par : **a.** $u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + 2u_n}{3}$, **b.** $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + 1$, **c.** $u_n = \lambda \sqrt{u_{n-1} u_{n-2}}$.

Exercice XI. Deux joueurs A et B jouent une partie de pile ou face ; la partie consiste en une succession de lancers indépendants les uns des autres. On suppose que $\mathbb{P}(\text{"A gagne"}) = p$ et $\mathbb{P}(\text{"B gagne"}) = q = 1 - p$. À chaque coup, le perdant donne 1 euro au gagnant. Au départ, A et B disposent des sommes respectives a et b , et ils ne peuvent pas abandonner la partie avant que l'un des deux joueurs soit ruiné. On cherche la probabilité $R(a, b)$ pour que A soit ruiné. On notera $A(a, b)$ l'événement "A est ruiné" et $S(a, b)$ la probabilité que B soit ruiné.

Exercice XII. Pour $t, a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ calculer $\exp(tA)$ où $A = \begin{pmatrix} \cosh a & b \sinh a \\ \frac{1}{b} \sinh a & \cosh a \end{pmatrix}$

Exercice XIII. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$, démontrer qu'il existe $\alpha, \beta \geq 0$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \|\exp(tA)\| \leq \alpha e^{\beta|t|}.$$

Exercice XIV. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$, démontrer qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$, $I_n + \frac{A}{1!} + \dots + \frac{A^k}{k!}$ appartient à $GL_n(\mathbb{R})$.

Exercice XV. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Démontrer que :

1. pour tout $p \leq n$ l'ensemble des matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $\text{rg}(A) \leq p$ est fermé.
2. l'ensemble des matrices non-inversibles de $M_n(\mathbb{R})$ n'est pas compact (si $n \geq 2$).
3. l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe.
4. l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.
5. $O_n(\mathbb{R})$ et $U_n(\mathbb{C})$ sont compacts.