

Quatre heures. Ce sujet comporte trois problèmes distincts et indépendants. Comme tout sujet d'écrit de l'agrégation il est beaucoup trop long.

Problème I. Racines n -ième d'une matrice. Agrégation, 2010, extrait.

Notations :

- On note $\mathbb{C}$ les corps des nombres complexes, $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels ;
- Pour p entier ≥ 1 , on note $M_p(\mathbb{C})$ l'algèbre des matrices carrées à p lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{C}$;
- On note 0_p la matrice nulle et I_p la matrice unité de $M_p(\mathbb{C})$;
- n est un entier ≥ 1 .

1. Montrer qu'il existe une norme N sur le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $M_p(\mathbb{C})$ vérifiant $N(BC) \leq N(B)N(C)$ pour toutes matrices B et C de $M_p(\mathbb{C})$

Dans la suite de ce problème N est une telle norme et A est une matrice de $GL_p(\mathbb{C})$. On note S_A l'ensemble des matrices X de $M_p(\mathbb{C})$ telles que $X^n = A$.

2. Démontrer que toute matrice X de S_A commute avec A .

Une matrice X est dans S_A si et seulement si $X^{-n} - B = 0_p$ où $B = A^{-1}$. Ceci conduit à introduire la suite :

$$X_{k+1} = (1 + 1/n)X_k - (1/n)BX_k^{n+1}$$

de premier terme X_0 commutant avec A .

3. On suppose dans cette question que la suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice Y de $GL_p(\mathbb{C})$.

- a.** Démontrer que pour tous $k, k' \in \mathbb{N}$ les matrices $X_k, X_{k'}, Y$ et A commutent deux à deux.
- b.** Démontrer que $Y^n = A$
- c.** On pose $U_k = X_k Y^{-1} - I_p$. Démontrer que la suite $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence :

$$nU_{k+1} + \sum_{2 \leq j \leq n+1} \binom{n+1}{j} U_k^j = 0_p.$$

4. a. Démontrer qu'il existe un unique réel $r > 0$ tel que

$$nr = \sum_{2 \leq j \leq n+1} \binom{n+1}{j} r^j.$$

b. Démontrer que la suite définie par récurrence par $x_0 \in \mathbb{R}, 0 \leq x_0 < r$ et

$$x_{k+1} = (1/n) \sum_{2 \leq j \leq n+1} \binom{n+1}{j} x_k^j$$

converge en précisant sa limite.

5. Soit $Y \in M_p(\mathbb{C})$ une solution de $Y^n = A$. On suppose que X_0 est une matrice de $M_p(\mathbb{C})$ qui commute avec Y . Déterminer $\alpha > 0$ tel que $N(X_0 - Y) < \alpha$ entraîne que la suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers Y .

Problème II. Matrices compagnons et matrices semblables. Agrégation, 2011, extrait.

Notations et définitions :

- K est un corps, n un entier non nul ;
- $M_n(K)$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes ;
- la matrice identité de $M_n(K)$ est notée I_n .
- le groupe inversible de l'anneau $M_n(K)$ est noté $GL_n(K)$;
- on note $U_n(K)$ l'ensemble des polynômes unitaires de degré n de $K[X]$.
- Deux matrices M et N de $M_n(K)$ sont dites *semblables* sur K si et seulement si il existe P dans $GL_n(K)$ telle que $N = PMP^{-1}$.
- La relation de similitude sur $M_n(K)$ est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalences de cette relation sont appelées classes de similitude sur K .
- Pour M dans $M_n(K)$, soit χ_M le polynôme caractéristique (unitaire) de M :

$$\chi_M(X) = \det(XI_n - M).$$

- Pour P dans $U_n(K)$, soit $\mathcal{E}_K(P)$ l'ensemble des matrices M de $M_n(K)$ telles que $\chi_M = P$. Puisque deux matrices semblables de $M_n(K)$ ont même polynôme caractéristique, $\mathcal{E}_K(P)$ est une réunion de classes de similitude sur K .
- Si P est le polynôme $X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \dots - a_1X - a_0$ de $K[X]$, on note $C(P)$ la matrice compagnon de P , c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{si } n \geq 2 \text{ et } (a_0) \text{ si } n = 1.$$

1. a. Pour quels (a, b, c) de K^3 la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable sur K ?
 b. Trouver deux matrices de $M_2(K)$ non semblables sur K et ayant le même polynôme caractéristique.
 c. Soient M et M' deux éléments de $M_n(K)$ diagonalisables sur K et telles que $\chi_M = \chi_{M'}$. Montrer que M et M' sont semblables sur K .
2. Soit P dans $U_n(K)$.
 a. Montrer que : $\chi_{C(P)} = P$.
 b. Si λ est dans K , montrer que le rang de $C(P) - \lambda I_n$ est supérieur ou égal à $n - 1$.
 c. Montrer l'équivalence entre les trois assertions suivantes :
 (i). le polynôme P est scindé sur K à racines simples,
 (ii). toutes les matrices de $\mathcal{E}_K(P)$ sont diagonalisables sur K ,
 (iii). $C(P)$ est diagonalisable sur K .
3. Soient r et s dans $\mathbb{N}^*$, A dans $M_r(K)$, A' dans $M_s(K)$, $M = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A' \end{array} \right)$. Montrer que M est diagonalisable sur K si et seulement si A et A' sont diagonalisables sur K .
4. Montrer que pour tout P de $U_n(K)$ l'ensemble $\mathcal{E}_K(P)$ est une réunion finie de classes de similitude sur K . On pourra admettre et utiliser le résultat suivant.
 “Si M est dans $M_n(K)$, il existe r dans $\mathbb{N}^*$ et r polynômes unitaires non constants $P_1, \dots, P_r$ de $K[X]$ tels que M soit semblable sur K à une matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont $C(P_1), \dots, C(P_r)$.”

Problème III. L'exponentielle $\exp : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective. Agrégation 2018, extrait.

Notations

- La $\mathbb{C}$ -algèbre des polynômes à coefficients complexes en une indéterminée X sera notée $\mathbb{C}[X]$.
- On notera $M_n(\mathbb{C})$ l'algèbre des matrices complexes à n lignes et n colonnes et $GL_n(\mathbb{C})$ le groupe linéaire (groupe des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{C})$). Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, on notera $\mathbb{C}[A] := \{P(A) \mid P \in \mathbb{C}[X]\}$ la sous-algèbre de $M_n(\mathbb{C})$ engendrée par A .
- On notera $\text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in M_n(\mathbb{C})$ la matrice diagonales dont les coefficients diagonaux sont les $\alpha_i \in \mathbb{C}$.
- On notera $[A, B] := AB - BA$ le commutateur de $A, B \in M_n(\mathbb{C})$.
- On rappelle le théorème suivant (*Décomposition de DUNFORD d'une matrice*) :
Pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$, il existe un unique couple $(S, N) \in M_n(\mathbb{C})^2$ de matrices telles que $A = S + N$, $[S, N] = 0$, S est diagonalisable et N est nilpotente. De plus $S, N \in \mathbb{C}[A]$, autrement dit, on peut écrire $S = P(A)$ et $N = Q(A)$ avec $P, Q \in \mathbb{C}[X]$.
- On rappelle que l'exponentielle de matrices est l'application $\exp : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ définie par la formule :

$$\exp A := \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k,$$

et que c'est une application $\mathcal{C}^\infty$ de l'espace vectoriel normé $M_n(\mathbb{C})$ dans lui-même, telle que, si $[A, B] = 0$, on ait $\exp(A + B) = (\exp A)(\exp B)$.

1. Donner une décomposition de DUNFORD de la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ (on discutera en fonction de $a \in \mathbb{C}$).
2. Justifier la relation $\exp(PAP^{-1}) = P(\exp A)P^{-1}$, où $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $P \in GL_n(\mathbb{C})$.
3. **a.** Soient $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{C}^*$ des complexes non nuls. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\exp(\alpha_i) = \beta_i$. Soit enfin $P \in GL_n(\mathbb{C})$. Notant $T := P \text{Diag}(\beta_1, \dots, \beta_n) P^{-1}$ et $S := P \text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) P^{-1}$, vérifier que $\exp S = T$.
- b.** On suppose de plus que, pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on ait $\beta_i = \beta_j \Rightarrow \alpha_i = \alpha_j$. Montrer que $S \in \mathbb{C}[T]$.
[Indication : on pourra utiliser qu'il existe un polynôme d'interpolation $F \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $F(\beta_i) = \alpha_i$.]
- c.** Montrer que, si T, P et les β_i sont donnés, on peut toujours choisir des α_i de sorte que soit vérifiée l'hypothèse de la question précédente.
- d.** Montrer que, si l'on ne fait pas cette hypothèse sur les α_i , la conclusion $S \in \mathbb{C}[T]$ peut être en défaut.
[Indication : on pourra prendre $T = P = I_2$.]

4. Pour tout entier naturel non nul n , on définit les polynômes suivants dans $\mathbb{C}[X]$:

$$E_n(X) := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} X^k \text{ et } L_n(X) := \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (X-1)^k.$$

Par convention $L_1(X) = 0$. Soient $P, Q, R \in \mathbb{C}[X]$; on notera $P \equiv Q \pmod{R}$ la congruence modulo R dans l'anneau $\mathbb{C}[X]$.

- a.** Montrer que $L_n \circ E_n \equiv X \pmod{X^n}$ et $E_n \circ L_n \equiv X \pmod{(X-1)^n}$. *[Indication : on pourra utiliser les développements de TAYLOR des fonctions usuelles $x \mapsto \exp x$ en 0 et $x \mapsto \ln(x)$ en 1.]*
- b.** À l'aide de ces formules, justifier très soigneusement le fait que les applications $N \mapsto \exp N$ et $U \mapsto L_n(U)$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre entre l'ensemble des matrices nilpotentes et l'ensemble des matrices unipotentes de $M_n(\mathbb{C})$.
5. Dédire des questions précédentes, en utilisant la décomposition de DUNFORD, que l'application $\exp : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.