On trouvera ici les notions sur les ensembles nécessaires aux étudiant-es de mathématiques.

1. La théorie des ensembles construit toutes les mathématiques à partir des ensembles et de la relation $\in$.
2. On écrit $A \subseteq B$ comme abréviation de « tout élément de A est élément de B » ou encore

$$\forall x, ((x \in A) \Rightarrow (x \in B)).$$

L'axiome d'extensionnalité affirme que $A = B$ si et seulement si A et B ont les mêmes éléments, c'est-à-dire que $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$ ou encore

$$\forall x, ((x \in A) \iff (x \in B)).$$

Exercice I. 1. Soit x et y deux ensembles. Combien la paire $\{x, y\}$ a-t-elle d'éléments ?
 2. En utilisant l'axiome d'extensionnalité, pour des ensembles x, y, x', y' ré-écrire l'égalité $\{x, y\} = \{x', y'\}$ sans utiliser d'accolade.

Pour démontrer l'égalité de deux ensembles il faut montrer deux inclusions.

3. $\emptyset$ est l'**ensemble vide**.
4. $A \cap B$ est l'**intersection** de A et B : $\forall x((x \in A \cap B) \iff (x \in A \text{ et } x \in B))$.
5. $A \cup B$ est l'**union** de A et B : $\forall x((x \in A \cup B) \iff (x \in A \text{ ou } x \in B))$.
6. La définition exacte du **couple** (x, y) n'est pas très intéressante ($(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ par exemple). La propriété essentielle est que $((x, y) = (x', y')) \iff ((x = x') \text{ et } (y = y'))$. En général $(x, y) \neq (y, x)$.

Exercice II. Pour des ensembles x, y, x', y' démontrer que $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\}$ si, et seulement si, $x = x'$ et $y = y'$.

7. Le **produit cartésien** $A \times B$ de A et B est l'ensemble des couples d'éléments de A et B .

On écrit A^2 pour $A \times A$ et A^n pour $A \times A \times \dots \times A$ (n facteurs). (Le produit cartésien est associatif : $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$.)

8. Une **relation** R entre A et B est une partie de $A \times B$. On écrit xRy pour $(x, y) \in R$.
9. Une **relation d'équivalence** R sur A est une partie de $A \times A$ qui est
 1. réflexive $\forall x \in A, xRx$;
 2. symétrique $\forall x, y \in A, xRy \iff yRx$;
 3. transitive $\forall x, y, z \in A, (xRy \text{ et } yRz) \Rightarrow xRz$.

La **classe d'équivalence** d'un élément x de A est $\{y \in A \mid xRy\}$ c'est une partie de A .

Le **quotient** A/R de A par R est l'ensemble des classes d'équivalences.

Exercice III. 1. Identifier $\mathbb{Z}$ avec un quotient de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
 2. Identifier $\mathbb{Q}$ avec un quotient de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.
 3. Identifier $\mathbb{R}$ avec un quotient d'une partie de $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$.

10. Une **application** de A vers B est une relation f entre A et B telle que $\forall x \in A \exists !y \in B y = f(x)$. On écrit $y = f(x)$ au lieu de xfy ou encore $(x, y) \in f$, on dit que y est l'**image** de x par f et que x est un **antécédent** de y . A est l'**ensemble de départ** et B l'**ensemble d'arrivée**. Tout élément de l'ensemble de départ a une et une seule image dans l'ensemble d'arrivée.
11. Une application de A vers B est **injective** si tout élément de l'ensemble d'arrivée a au plus un antécédent dans l'ensemble de départ : $\forall x, x' \in A, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

12. Une application de A vers B est **surjective** si tout élément de l'ensemble d'arrivée a au moins un antécédent dans l'ensemble de départ : $\forall y \in B, \exists x \in A, f(x) = y$.

13. Une application de A vers B est **bijjective** si elle est à la fois injective et surjective : $\forall y \in B, \exists! x \in A, f(x) = y$.

14. Une **fonction** de A vers B est une application d'une partie de A (son **domaine de définition**) vers B . Cette nuance entre fonction et application n'est pas bien établie.

Exercice IV. Rappeler les domaines de définitions et images des fonctions trigonométriques réciproques.

15. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ est l'ensemble des entiers naturels.

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ est l'anneau des entiers relatifs.

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\}$ est le corps des nombres rationnels.

$\mathbb{R}$ est le corps des nombres réels comme $\sqrt{3}, \pi, -e^{\sqrt{7}}, \frac{-99}{\ln 2}$, etc.

$\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ est le corps des nombres complexes.

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

16. Deux ensembles ont le même cardinal s'il existe une bijection entre eux. Le cardinal des ensembles dénombrables ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}^2, \mathbb{Q}[X]$, etc.) est $\aleph_0$. Le cardinal du continu est $2^{\aleph_0}$, c'est le cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}[X], \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, etc.

Exercice V. **1.** Expliciter une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ puis entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$.
2. Expliciter une bijection entre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $[0; 1]$.
3. Démontrer que le cardinal du continu est strictement plus grand que le cardinal du dénombrable.