Exercice I. Choisissez votre norme favorite sur l'espace des polynômes. La dérivation y est-elle continue ?

Exercice II. **Théorème de Riesz.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé dont la boule unité (fermée) B est compact.

1. Démontrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n \in E$ tels que $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, \frac{1}{2})$.

On considère V le sous-espace vectoriel engendré par $a_1, \dots, a_n$ et on se propose de démontrer que $V = E$ en raisonnant par l'absurde. On suppose donc qu'il existe $x \in E$ tel que $x \notin V$.

2. Démontrer que $d(x, V) > 0$. On pose désormais $\epsilon = d(x, V)$.

3. Démontrer qu'il existe $y \in V$ tel que $d(x, V) = \|x - y\|$. On pose $z = \frac{1}{\|x-y\|}(x - y)$.

4. Démontrer qu'il existe $i = 1, \dots, n$ tel que $\|z - a_i\| \leq \frac{1}{2}$.

5. Établir que $\|x - y\|.\|z - a_i\| \geq \epsilon$ et conclure à une contradiction.

6. Conséquences. Démontrer que dans un espace vectoriel normé de dimension infinie :

a. aucune sphère n'est compacte.

b. tout compact est d'intérieur vide.

Exercice III. **Distance d'un point à une droite.** Soit E un espace vectoriel normé et $\varphi \in L_c(E, \mathbb{R})$, $\varphi \neq 0$. Démontrer que pour tout $x \in E$, $d(x, \ker(\varphi)) = \frac{|\varphi(x)|}{|||\varphi|||}$

Exercice IV. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme définie par $N(A) = \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$. Calculer $|||f|||$ où $f : \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ est définie par $f(A) = \mathrm{tr}(A)$.

Exercice V. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et N une norme sur l'espace vectoriel $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}),\ N(AB) \leq CN(A)N(B).$$

Exercice VI. Dans cet exercice $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. **a.** Démontrer que $\mathrm{GL}_n(k)$ est dense dans $\mathrm{M}_n(k)$.

b. En déduire que pour deux matrices $A, B \in \mathrm{M}_n(k)$, les polynômes caractéristiques de AB et BA sont égaux.

c. Quelle relation pouvez-vous établir entre χ_{AB} et χ_{BA} lorsque A et B sont rectangulaires ?

2. Montrer qu'il existe une base de $\mathrm{M}_n(k)$ formée de matrices inversibles.

3. Démontrer que pour toute norme d'algèbre $|||\ |||$ sur $\mathrm{M}_n(k)$, pour toute matrice A et pour toute valeur propre λ de A, $|\lambda| \leq |||A|||$.

4. Démontrer qu'il n'y a pas de normes sur $\mathrm{M}_n(k)$ telle que pour toutes matrices $A \in \mathrm{M}_n(k)$ et $P \in \mathrm{GL}_n(k)$, $\|P^{-1}AP\| = \|A\|$.

5. Démontrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Et dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice VII. Décrire le mouvement d'un pendule pesant au voisinage de la verticale en l'absence de frottements (on remarquera notamment que la période d'oscillation ne dépend pas du poids), puis en présence de frottements proportionnels à la vitesse.

Exercice VIII. Résoudre les équations différentielles : **1.** $y' + y = \sin x$, **2.** $y'' + 2y' + y = 2x^2 \sinh x$, **3.** $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{\sqrt{x^2 + 1}}$, **4.** $xy' - 2y = x$, **5.** $(1 - x^2)y' + xy = 0$,

6. $4xy'' + 2y' - y = 0$ (changement de variable $t = \sqrt{|x|}$).

Exercice IX. **1.** Résoudre le système d'équations différentielles : $\begin{cases} x'' + 3y' - 4x + 6y = 0 \\ y'' + x' - 2x + 4y = 0 \end{cases}$

2. Résoudre l'équation différentielle $\begin{vmatrix} y'' & y' & y \\ y & y'' & y' \\ y' & y & y'' \end{vmatrix} = 0.$

3. Soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Résoudre $y'' + \omega^2 y = f$.

4. Pour $\epsilon > 0$ on considère $f = g_\epsilon : t \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq 0 \\ \frac{t}{\epsilon} \text{ si } 0 \leq t \leq \epsilon \\ 1 \text{ si } t \geq \epsilon \end{cases}$ et y_ϵ la solution de l'équation différentielle précédente.

Étudier $\epsilon \mapsto y_\epsilon$ lorsque ϵ tend vers 0.

Exercice X. **1.** Que savez-vous de la suite de Fibonacci (terme général, limite des rapports, co-primalité de deux termes consécutifs,...) ?

2. Étudier les suites définies par : **a.** $u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + 2u_n}{3}$, **b.** $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + 1$, **c.** $u_n = \lambda\sqrt{u_{n-1}u_{n-2}}$.

Exercice XI. Deux joueurs A et B jouent une partie de pile ou face ; la partie consiste en une succession de lancers indépendants les uns des autres. On suppose que $\mathbb{P}$("A gagne") $= p$ et $\mathbb{P}$("B gagne") $= q = 1 - p$. À chaque coup, le perdant donne 1 euro au gagnant. Au départ, A et B disposent des sommes respectives a et b, et ils ne peuvent pas abandonner la partie avant que l'un des deux joueurs soit ruiné. On cherche la probabilité $R(a, b)$ pour que A soit ruiné. On notera $A(a, b)$ l'événement "A est ruiné" et $S(a, b)$ la probabilité que B soit ruiné.

Exercice XII. Pour $t, a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ calculer $\exp(tA)$ où $A = \begin{pmatrix} \cosh a & b \sinh a \\ \frac{1}{b}\sinh a & \cosh a \end{pmatrix}$

Exercice XIII. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, démontrer qu'il existe $\alpha, \beta \geq 0$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \|\exp(tA)\| \leq \alpha e^{\beta|t|}.$$

Exercice XIV. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, démontrer qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$, $I_n + \frac{A}{1!} + \cdots + \frac{A^k}{k!}$ appartient à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice XV. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Démontrer que :

1. pour tout $p \leq n$ l'ensemble des matrices $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{rg}(A) \leq p$ est fermé.

2. l'ensemble des matrices non-inversibles de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas compact (si $n \geq 2$).

3. l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe.

4. l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

5. $O_n(\mathbb{R})$ et $U_n(\mathbb{C})$ sont compacts.