1 Espaces affines

Exercice I. **1.** Montrer que l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires à second membre nul est un espace vectoriel. Si les seconds membres ne sont pas nuls et qu'il existe une solution, c'est un espace affine.

2. Montrer que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène est un espace vectoriel. Si le second membre est non nul, c'est un espace affine (ce qu'on formule souvent en disant que toute solution de l'équation est la somme d'une solution de l'équation homogène et d'une solution particulière).

3. Montrer que l'ensemble $\{P \in \mathbb{R}[X], P(1) = \pi\}$ est un espace affine, trouver sa direction.

Exercice II. Montrer la règle du parallèlogramme : Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ alors $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. On dit alors que $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice III. Donner l'intersection des plans suivants de $\mathbb{R}^4$

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ y+t=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y+3z=1 \\ x-t=3 \end{cases}$$

Exercice IV. Soit $\mathcal{E}$ un plan affine muni d'un repère $\mathcal{R} := (O; e_1, e_2)$.

1. Trois points de coordonnées (x, y), (x', y'), (x'', y'') sont alignés si, et seulement si, $\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

2. Montrer que l'équation cartésienne d'une droite est de la forme $ax + by + c = 0$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Donner l'équation cartésienne de la droite vectorielle qui dirige cette droite affine.

3. Deux droites d'équation $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont parallèles si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$.

4. Trois droites d'équation $a_ix + b_iy + c_i = 0$, $1 \leq i \leq 3$, sont concourantes ou parallèles si et seulement si $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$.

5. On se donne deux équations cartésiennes de plan dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$: $(\mathcal{P}_1)$ d'équation $a_1x+b_1y+c_1z+d_1 = 0$, et $(\mathcal{P}_2)$ d'équation $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Donne une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients pour que ces deux plans soient parallèles ? s'intersectent selon une droite ? Soit $(\mathcal{P}_3)$ d'équation $a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$. condition nécessaire et suffisante pour que les trois plans soient parallèles ? qu'ils s'intersectent selon une droite ? selon un point ?

Exercice V. Dans le plan affine rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la conique

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \mid ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0\}$$

où $a, b, c, d, e, d \in \mathbb{R}$ et $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

1. Trouver un repère $(\Omega, \vec{e}, \vec{f})$ par rapport auquel la conique a pour équation

$$\mathcal{C} = \{(X, Y) \mid \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = 1\}.$$

2. Discuter la nature du cône isotrope de cette conique en fonction du signe de $\lambda_1\lambda_2$. *(Le cône isotrope a pour équation*

$$\mathcal{C}_0 = \{(X, Y) \mid \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = 0\}.)$$

2 Barycentres

Exercice VI. [Menelaus] Soit ABC un triangle, on considère les points a, b, c sur les droites $(BC), (AC), (AB)$. Montrer que les point a, b, c sont alignés si et seulement si

$$\frac{\overline{aB}}{\overline{aC}} \times \frac{\overline{bC}}{\overline{bA}} \times \frac{\overline{cA}}{\overline{cB}} = 1.$$

(On utilisera à bon escient le théorème de Thalès.*)*

Exercice VII. [Céva] Soit ABC un triangle, on considère les points a, b, c sur les droites $(BC), (AC), (AB)$. Montrer que les droites $(Aa), (Bb), (Cc)$ sont concourantes ou parallèles si et seulement si

$$\frac{\overline{aB}}{\overline{aC}} \times \frac{\overline{bC}}{\overline{bA}} \times \frac{\overline{cA}}{\overline{cB}} = -1$$

On fera trois étapes en utilisant la notion de barycentre :
- Montrer la formule si les droites sont parallèles.
- Montrer la formule si les droites sont concourantes.
- Si la formule est vraie, et que les droites ne sont pas parallèles montrer qu'elles sont concourantes en raisonnant par l'absurde.

Exercice VIII. Soit ABC un triangle équilatéral et M un point de son plan. On note A', B', C' les symétriques de M par rapport à $(BC), (CA), (AB)$. Montrer que les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes sauf si M est sur le cercle passant par les points A_1, B_1 et C_1 où A_1 est le symétrique de A par rapport à (BC), B_1 celui de B par rapport à (AC) et C_1 celui de C par rapport à (AB).

1. Caractériser ce cercle.

2. Donner les coordonnées barycentriques de M en fonction de trois longueurs.

3. Exprimer les coordonnées barycentriques des autres points.

3 Transformations affines

Exercice IX. Montrer qu'une application affine est injective (respectivement surjective) si, et seulement si, sa partie linéaire l'est.

Exercice X. Soient A, B deux points du plan et λ, $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Déterminer la composition de l'homothétie de centre A et de rapport λ avec l'homothétie de centre B et de rapport μ.

Exercice XI. Montrer que l'ensemble des homothéties et translations est un sous-groupe de $GA(\mathcal{E})$.

Exercice XII. Quelle est la conjuguée de $\varphi \circ h \circ \varphi^{-1}$ de l'homothétie de centre O et de rapport λ par la transformation affine φ ?

Exercice XIII. Une similitude f de rapport $k > 0$ est une transformation affine telle que pour tous points A et B, $d(f(A), f(B)) = kd(A, B)$.

1. Démontrer qu'il existe une homothétie h et une isométrie u telles que $f = h \circ u$.

2. Si $k \neq 1$ démontrer que f possède un unique point fixe.

Exercice XIV. On considère les deux droites D_1, D_2 données par les équations $x + y = 2, 2x - y = 4$.

1. Donner l'expression analytique de la projection sur D_1 parallèlement à D_2.

2. Donner l'expression analytique de la symétrie par rapport à D_1 parallèlement à D_2.

3. Donner l'expression analytique de l'affinité de base D_1 de direction D_2 de rapport 3.

Exercice XV. Déterminer la nature des applications affines

$$\phi : (x, y) \mapsto (\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y + 1, -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y - 1).$$

$$\psi : (x, y) \mapsto (\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + 1, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - 1).$$

$$\xi : (x, y) \mapsto (x + \frac{1}{2}, -y).$$

Exercice XVI. **1.** Soit ABC un triangle, I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[BC]$ et K le milieu de $[AC]$. Montrer que l'orthocentre du triangle IJK est le centre O du cercle circonscrit à ABC.

2. Soit G le centre de gravité de ABC et h l'homothétie de centre G et de rapport $-1/2$. Quelle est l'image par h de A, B, C? De la hauteur de ABC passant par A? De l'orthocentre H du triangle ABC? En déduire que $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OJ}$.

3. Soit AB la corde d'un cercle $\mathcal{C}$. Montrer que le lieu de l'orthocentre du triangle ABM lorsque M décrit $\mathcal{C}$ est le cercle $\mathcal{C}'$ symétrique orthogonal de $\mathcal{C}$ par rapport à (AB).

Exercice XVII. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine et O un point de $\mathcal{E}$.

1. Démontrer que toute transformation affine f de $\mathcal{E}$ s'écrit de manière unique $f = t_{\vec{u}} \circ g$ où $t_{\vec{u}}$ est la translation de vecteur $\vec{u}$ et g est une transformation affine qui fixe O.

2. En déduire un isomorphisme de groupes : $\mathrm{GA}(\mathcal{E}) \tilde{\to} E \rtimes \mathrm{GL}(E)$ où E est la direction de $\mathcal{E}$.

4 Angles

Exercice XVIII. On considère un triangle ABC. On note a, b, c, R les mesures des côtés BC, AC, AB et du rayon du cercle circonscrit. On note α, β, γ les mesures des angles non orientés en A, B, C respectivement.

1. Montrer que

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

2. Montrer que

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Exercice XIX. Soient A, B, C trois points non alignés et a, b, c les longueurs des côtés du triangle formé par ces points. Montrer

1. Le centre du cercle inscrit est barycentre de

$$(A, a); (B, b); (C, c)$$

2. Le centre du cercle circonscrit est barycentre de

$$(A, \sin(2A)); (B, \sin(2B)); (C, \sin(2C))$$

3. L'orthocentre est barycentre de

$$(A, \tan(A)); (B, \tan(B)); (C, \tan(C))$$

5 Nombres complexes

Exercice XX. Trois points sont les sommets d'un triangle équilatéral si et seulement si

$$a + jb + j^2c = 0$$

Exercice XXI. Montrer que quatre points A, B, C, D sont alignés ou cocycliques si et seulement si

$$\frac{a-d}{b-d} \times \frac{b-c}{a-c} \in \mathbb{R}$$

Exercice XXII. **1.** Donner l'expression analytique complexe d'une rotation, d'une symétrie axiale et d'une symétrie glissée.

2. Pour $a, b \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$, quelle est l'isométrie $z \mapsto a\bar{z} + b$.

3. Montrer que les similitudes directes sont de la forme $z \mapsto az + b$ avec $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Dans ce cas $|a|$ est le rapport de la similitude et $\arg(a)$ sont angle.

6 Espace affine euclidien

Exercice XXIII. Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites non-coplanaires.

1. Montrer qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

2. Si M_1 et M_2 sont les intersections de Δ avec $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, montrer que M_1M_2 est la distance entre $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

Exercice XXIV. Soient A et B deux points distincts du plab et $k > 0$. Déterminer les ensembles :

1. $\mathcal{E} = \{M \mid \frac{MA}{MB} = k\}$; **2.** $\mathcal{E}_+ = \{M \mid \frac{MA}{MB} > k\}$; **3.** $\mathcal{E}_- = \{M \mid \frac{MA}{MB} < k\}$.

Exercice XXV. Dans $\mathbb{R}^3$ on se donne un plann $\mathcal{P}$ et deux points A et B dans un même demi-espace délimité par $\mathcal{P}$. Trouver un point M sur $\mathcal{P}$ qui minimise $AM + BM$.

Exercice XXVI. Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus. On cherche $P \in [BC]$, $Q \in [AC]$ et $R \in [AB]$ tels que le périmètre du triangle PQR soit minimal.

1. Montrer qu'une solution existe.

2. On fixe $P \in [BC]$. Déterminer $Q \in [AC]$ et $R \in [AB]$ pour que le périmètre du triangle PQR soit minimal. *(On pourra faire intervenir les symétriques P' et P'' de P par rapport à (AC) et (AB).*

3. Montrer que la mesure de l'angle géométrique $\widehat{P'AP''}$ ne dépend pas de P. En déduire que la distance $P'P''$ est atteinte lorsque P est la hauteur issue de A.

4. Conclure.

7 Isométries de $\mathbb{R}^3$

Exercice XXVII. Quelle est la composée de :

1. 3 réflexions orthogonales de plans parallèles ?

2. 3 réflexions orthogonales de plans orthogonaux deux à deux.

Exercice XXVIII. Montrer qu'une rotation est le produit de deux symétries orthogonales par rapport à des plans contenant l'axe de la rotation. De plus l'un des deux plans peut être pris de manière arbitraire.

Exercice XXIX. Soient ϕ et ψ deux rotations affines dans l'espace euclidien de dimension 3. Quand l'angle de $\psi \circ \phi$ est-il la somme des angles des deux rotations ?

Exercice XXX. On note ρ_1 et ρ_2 deux rotations affines de $\mathbb{R}^3$ et $\rho = \rho_1 \circ \rho_2$, montrer que :

1. Si ρ est une translation, alors $r_1 = r_2^{-1}$, en notant r_1, r_2 les parties linéaires de ρ_1 et ρ_2 respectivement. En déduire que ρ_1 et ρ_2 ont des axes parallèles.

2. Si ρ_1 et ρ_2 ont des axes coplanaires, alors ρ est une translation ou une rotation (décomposer chaque rotation en produit de réflexions par rapport à des plans bien choisis).

3. Si les axes de ρ_1 et ρ_2 ne sont pas coplanaires, alors ρ est un vissage dont la translation est non triviale (noter que si ρ est une rotation, alors elle a un point fixe O et l'axe de ρ_1 et l'axe de ρ_2 sont contenus dans le plan médiateur du segment $[O, \rho_2(O)]$).

8 Polyèdres réguliers

Exercice XXXI. Montrer que dans un tétraèdre régulier, deux arêtes opposées sont orthogonales et que leur perpendiculaire commune passe par leur milieu.

Exercice XXXII. Par définition, un tétraèdre régulier est un tétraèdre dont les côtés sont isométriques (autrement dit, c'est l'enveloppe convexe de quatre points A_1, ..., A_4 tels qu'il existe $a > 0$ vérifiant : pour tout $i \neq j$, $||\overrightarrow{A_iA_j}|| = a$).

Le jury a posé en 2008 la question suivante : est-ce qu'un tétraèdre dont les 4 faces ont la même aire est nécessairement régulier ?

1. Dans un plan de $\mathbb{R}^3$, on considère un triangle ABC isocèle en C tel que $CA(= CB) > AB$. On cherche l'ensemble des points $D \in \mathbb{R}^3$ vérifiant

$$DA = DB = CA = CB \quad \text{et} \quad DC = AB.$$

Montrer que cet ensemble est à l'intersection de deux cercles.

2. En déduire qu'il existe un tétraèdre non régulier avec des faces isométriques.

Supposons maintenant que $ABCD$ soit un tétraèdre avec des faces de même aire.

3. Soient I, J les pieds sur (AB) et (CD) de la perpendiculaire commune à (AB) et (CD). Montrer que

$$||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}||^2 = ||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{IJ}||^2 + ||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{JC}||^2,$$

$$||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}||^2 = ||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{IJ}||^2 + ||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{JD}||^2.$$

4. En déduire une égalité de longueur.

5. Montrer que les faces du tétraèdre sont isométriques (on pourra considérer le retournement autour de la droite (IJ)).

9 Groupes d'isométries

Exercice XXXIII. Si f est une isométrie d'un espace affine de dimension n, montrer qu'il existe un unique couple (g, u) ou u est un vecteur de l'espace vectoriel et g une isométrie ayant au moins un point fixe tels que $f = t_u \circ g = g \circ t_u$. On commencera par déterminer où se trouve u et on utilisera une propriété des endomorphismes orthogonaux.

Exercice XXXIV. Trouver le groupe d'isométries préservant la courbe $y = \sin x$. On écrira la forme générale d'une isométrie du plan.

Exercice XXXV. Soit G un sous groupe fini de $SO(3)$.

1. A chaque élément de G diffèrent de l'identité on lui associe son axe et les deux points sur la sphère unité. Montrer que G agit sur cet ensemble X : Si P est un pole fixe par g, on regardera le pole fixé par hgh^{-1}.
2. On note s le nombres d'orbites et ν_i le cardinal du stabilisateur de chaque orbite. En calculant le cardinal de $\{(g, x) \in (G, X), g.x = x\}$ de deux façons montrer que le nombre d'orbites vaut

$$s = \frac{1}{|G|} \sum_g |Fix(g)| \quad \textbf{Formule de Burnside}.$$

3. En déduire une relation entre $s, |G|$ et le cardinal de X. Montrer alors :

$$2(1 - \frac{1}{|G|}) = \sum_{i=1}^{s} (1 - \frac{1}{\nu_i}).$$

4. Montrer que s vaut 2 ou 3.
5. Si $s = 2$, en déduire que G stabilise une droite. Conclure que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
6. On suppose maintenant que G ne stabilise aucune droite.Montrer que $s = 3$.
7. On suppose alors $\nu_1 \leq \nu_2 \leq \nu_3$.
8. Montrer que ν_2 vaut 2 ou 3.
9. Si $\nu_2 = 2$, alors
   — Montrer que dans ce cas, on a $|G| = 2n$ avec $\nu_3 = n$. Notons x un pole de l'orbite O_3.
   — Considérer G_x montrer que ce groupe est cyclique, notons a son générateur. Vérifier que a fixe deux pôles.
   — Trouver s dans $G \setminus G_x$ tel que $s(x) = -x$.
   — Décrire s^2 et en déduire que s, sa génèrent G. Conclure.
10. Supposons donc $\nu_2 = 3$. Montrer que $\nu_1 = 2$ et que $\nu_2 = 3$.
11. En déduire que les seules possibilités pour $|G|$ et les ν_i sont

$$(12, 2, 3, 3), (24, 2, 3, 4), (60, 2, 3, 5).$$

Exercice XXXVI. **1.** Montrer que le groupe des isométries d'un triangle équilatéral est isomorphe au groupe symétrique S_3.

2. Décrire les isométries du polygone régulier à n côtés (vous commencerez par un triangle équilatéral et un carré).

Exercice XXXVII. **1.** Décrire les 24 isométries qui laissent invariant un tétraèdre régulier.

2. Décrire comment ces 24 isométries permutent les trois diagonales du tétraèdre régulier.

3. En déduire une décomposition du groupe symétrique S_4.

Exercice XXXVIII. **1.** Décrire les 48 isométries qui laissent invariant un cube.

2. Remarquer que les diagonales des faces du cube forment deux tétraèdres réguliers. Décrire comment les 48 isométries du cube agissent sur ces tétraèdres.

3. Déduire une décomposition du groupe des isométries du cube.

Exercice XXXIX. **1.** Rappeler que le cube et l'octaèdre régulier sont duaux l'un à l'autre.

2. En déduire que leurs groupes d'isométries sont égaux.

3. Rappeler que le dodécaèdre régulier et l'icosaèdre régulier sont duaux et en déduire que leurs groupes d'isométries sont égaux.

4. Montrer que les sommets d'un dodécaèdre régulier forment cinq cubes qui sont permutés par les isométries de l'icosaèdre.