On trouvera ici les notions de logique nécessaires aux étudiant-es en mathématiques.

1. Tiers exclu. Un énoncé mathématiques est soit vrai soit faux.

2. Théorème de complétude de GÖDEL. Un énoncé est vrai si et seulement si il peut être démontré.

Les deux règles précédentes, auxquelles je donne des noms pompeux, sont avant tout des règles pour les étudiant-e-s. Toute infraction à ces règles sera lourdement sanctionnée.

3. Calcul des prédicats. Les énoncés mathématiques s'écrivent avec les symboles suivant dont on rappelle la table de vérité :

A	B	non A	A et B	A ou B	$A \Rightarrow B$	$A \iff B$
Vrai	Vrai	Faux	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux	Faux	Vrai	Faux	Faux
Faux	Vrai	Vrai	Faux	Vrai	Vrai	Faux
Faux	Faux	Vrai	Faux	Faux	Vrai	Vrai

4. *Contrairement à l'usage en français*, $(A \Rightarrow B) = ((\text{non } A) \text{ ou } B)$. On utilise aussi « si A alors B » ou même « A donc B » et toutes sortes de variantes (« nous en déduisons », « ainsi », etc.) au lieu de $\Rightarrow$.

5. $(A \iff B) = ((A \Rightarrow B) \text{ et } (B \Rightarrow A))$. Pour démontrer que $A \iff B$ il faut en général montrer que $A \Rightarrow B$ et que $B \Rightarrow A$.

On utilise aussi « si et seulement si » et « condition nécessaire et suffisante » à la place de $\iff$.

6. Quantificateurs. On utilise deux quantificateurs pour écrire des énoncés.

$\forall$: « quel que soit », « pour tout », « soit », etc.

$\exists$: « il existe ».

On rencontre aussi parfois $\exists!$ qui signifie « il existe un unique » et qui est un raccourci pour un énoncé un peu plus long.

Exercice VII. Écrire avec des quantificateurs qu'une fonction strictement croissante s'annule au plus une fois sur un intervalle

8. Variables, constantes et assimilées.

Dans un énoncé toute variable doit être précédé d'un quantificateur.

C'est une règle absolue pour les étudiant-e-s. Y déroger entrainera systématiquement une sanction du type « qui est x ? » de la part du correcteur.

Les quantificateurs se placent avant la première utilisation de la variable. L'ordre des quantificateurs est très important.

Exercice IX. **1.** Écrire la définition de vecteurs colinéaires.
2. Écrire la définition d'une valeur propre.
3. Écrire la définition de la continuité et de la continuité uniforme.

10. Il existe quelques exceptions à la règle précédente :

Une **constante** ou un **paramètre** est une variable dont le quantificateur est placé en tout début d'un exercice ou d'un problème. L'usage veut qu'on mette parfois le quantificateur d'une constante à la fin de l'énoncé : « où C est une constante réelle ».

Exercice XI. Pour un paramètre réel m on considère la droite D_m d'équation

$$3mx + (1 - 2m)y - 3 = 0.$$

1. Démontrer que, lorsque le paramètre m varie, les droites D_m sont concourantes en un point A que l'on déterminera.
2. Quelle est l'unique droite passant par A qui n'appartient pas à la famille $(D_m)_{m\in\mathbb{R}}$?

En analyse, dans l'énoncé $\int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$, t n'est pas une variable au sens de la logique, elle n'a pas besoin de quantificateurs. De même dans l'énoncé $\sum_{k=1}^{10} k^2 = 385$, k n'est pas une variable.

En théorie des ensembles, dans l'énoncé $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$, x n'est pas non plus une variable au sens de la logique. Cet énoncé est un raccourci pour $\forall x((x \in A \cap B) \iff (x \in A \text{ et } x \in B))$.

12. Négation. $\text{non}(A \text{ ou } B) = ((\text{non}A) \text{ et } (\text{non}B))$.

$\text{non}(A \text{ et } B) = ((\text{non}A) \text{ ou } (\text{non}B))$.

$\text{non}(A \Rightarrow B) = (A \text{ et } (\text{non}B))$.

$\text{non}(\forall x\ P(x)) = (\exists x \text{ non } P(x))$.

$\text{non}(\exists x\ P(x)) = (\forall x \text{ non } P(x))$.

13. Contraposée. $(A \Rightarrow B) = ((\text{non } B) \Rightarrow (\text{non } A))$.

14. Raisonnement par récurrence. L'axiomatique de Péano comporte le schéma d'axiome de récurrence suivant : pour tout formule à une variable libre $\varphi(n)$:

$$A_\varphi : \Big(\varphi(0) \text{ et } \big(\forall n\,(\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1))\big)\Big) \Rightarrow (\forall n\,\varphi(n)).$$

La rédaction d'une récurrence comporte donc quatre étapes clairement indiquées :

1. Hypothèse de récurrence : $\varphi(n)$;
2. Cas initial : $\varphi(0)$;
3. Récurrence, induction : $\forall n\,(\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1))$
4. Conclusion : $\forall n\,\varphi(n)$

Exercice XV. Démontrer que le rapport de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci converge vers le nombre d'or.