Faculté des sciences
Université d'Aix*Marseille

Master Meef mathématiques, 1re année, T. Coulbois

Capes blanc
mercredi 6 mars 2019

☐ Aix-Montperrin
☐ Luminy
☐ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert
☒ Espe

Les deux problèmes sont indépendants.

Problème I. Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $2x + 3y + 3 = 0$ et les point $A(0, -1)$ et $F(2, 2)$. La projection orthogonale du plan sur la droite $\mathcal{D}$ est notée p.

1. Projection orthogonale d'un point sur une droite.
a. Déterminer un vecteur directeur et un vecteur normal à $\mathcal{D}$.
b. Déterminer une équation de la droite Δ perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par A.
2. On considère deux points $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ du plan. À quelle condition sur leurs coordonnées le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est-il orthogonal à la droite $\mathcal{D}$.
3. a. Démontrer que $p(F) = A$.
b. Déterminer tous les antécédants de A par la projection p.

4. Expression analytique de la projection. Soit $M(x, y)$ un point quelconque du plan et $M' = p(M)$ de coordonnées (x', y') son projeté orthogonal sur la droite $\mathcal{D}$.
a. Écrire un système de deux équations vérifié par les coordonnées de M et M'.
b. En déduire la relation :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{3}{13} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

5. Étude de la matrice $A = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$.
a. Déterminer le rang de A.
b. Démontrer que le polynôme caractéristique de la matrice A est $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda$.
c. Donner les valeurs propres, et les sous-espaces propres associés de la matrice A.
d. Déterminer le noyau et l'image de A.

6. Distance d'un point à la droite $\mathcal{D}$.
a. Pour un point M du plan et un point N de la droite $\mathcal{D}$, démontrer que $MN \geq Mp(M)$.
b. En déduire que la distance du point M à la droite $\mathcal{D}$ est $d(\mathcal{D}, M) = Mp(M)$.
c. pout tout point $M(x, y)$ du plan démontrer que

$$d(\mathcal{D}, M) = \frac{|2x + 3y + 3|}{\sqrt{13}}.$$

d. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{P}$ des points du plan équistants de la droite $\mathcal{D}$ et du point F a pour équation :

$$\mathcal{P} : 9x^2 - 12xy + 4y^2 - 64x - 70y + 95 = 0$$

7. Un changement de repère. On considère les vecteurs $\vec{e}(3, -2)$ et $\vec{f}(2, 3)$ et le repère $(F, \vec{e}, \vec{f})$.
8. a. Donner les coordonnées des points F et A par rapport au repère $(F, \vec{e}, \vec{f})$.
b. Donner des équations des droites $\mathcal{D}$ et Δ par rapport au repère $(F, \vec{e}, \vec{f})$.
c. Pour un point M du plan on considère ses coordonnées (x, y) par rapport au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et (X, Y) par rapport au repère $(F, \vec{e}, \vec{f})$. Exprimer (x, y) en fonction de X et Y.
d. En déduire une équation de l'ensemble $\mathcal{P}$ par rapport au repère $(F, \vec{e}, \vec{f})$.

Problème II. Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$ et pour chaquen entier $n \in \mathbb{Z}$ on considère la droite $\mathcal{D}_n$ d'équation $y = nx - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}$.

1. Pour $n \in \mathbb{Z}$ démontrer que les droites $\mathcal{D}_n$ et $\mathcal{D}_{n+1}$ sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.
2. Déterminer pour chaque entier $n \in \mathbb{Z}$, les coordonnées du point A_n intersection de la droite $\mathcal{D}_n$ et de la parabole $\mathcal{P}$.
3. Démontrer que, pour chaque entier $n \in \mathbb{Z}$, la droite $\mathcal{D}_n$ est tangente à la parabole $\mathcal{P}$.
4. On considère dans cette question, pour chaque entier $n \in \mathbb{Z}$, le vecteur directeur $\vec{u}_n(1, n)$ de $\mathcal{D}_n$.
a. Démontrer que

$$\vec{u}_n \cdot \vec{j} = \vec{u}_n \cdot \frac{\overrightarrow{OA_n}}{OA_n}.$$

b. En déduire que les droites (OA_n) et la droite d'équation $x = n$ sont symétriques par rapport à la droite $\mathcal{D}_n$. *Vous pourrez utiliser les angles formés par ces trois droites à condition d'être d'une grande rigueur avec la notion d'angle.*

Nous avons ci-dessus illustré le fait que les rayons lumineux arrivant du soleil (situé ici verticalement à l'infini au dessus de la parabole) se réfléchissent tous sur la parabole pour se concentrer au point O foyer de la parabole.

Tangentes à la parabole passant par un point.
On considère maintenant le point $A(-2, -2)$ et pour un nombre réel t, on considère la droite Δ_t d'équation $tx - (t + 1)y - 2 = 0$.
5. **a.** Démontrer que la droite Δ_t passe par A.
b. Donner, lorsque cela est possible, le coefficient directeur de la droite Δ_t.
c. Quelle est la seule droite passant par A qui n'est pas dans la famille $(\Delta_t)_{t\in\mathbb{R}}$.
6. Déterminer le nombre d'intersection de la droite Δ_t avec la parabole $\mathcal{P}$ en fonction de $t \in \mathbb{R}$.
7. En déduire que les tangentes à la parabole $\mathcal{P}$ passant par A sont les deux droites Δ_t pour $t = \frac{1\pm\sqrt{7}}{2}$.

Droite orthoptique à une parabole.
Pour un nombre réel $a \in \mathbb{R}$ nous considérons la droite $\mathcal{D}_a$ d'équation $y = ax - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}$.
8. Démontrer que pour tout nombre réel $a \neq 0$, les droites $\mathcal{D}_a$ et $\mathcal{D}_{\frac{-1}{a}}$ sont perpendiculaires.
9. Démontrer que le point d'intersection des droites $\mathcal{D}_a$ et $\mathcal{D}_{\frac{-1}{a}}$ appartient à la droite d'équation $y = -1$.
Cette droite d'équation $y = -1$ est appelée directrice de la parabole $\mathcal{P}$.
10. En vous inspirant de la question 3, démontrer que la directrice est l'ensemble des points du plan par lesquels il passe deux tangentes perpendiculaires à la parabole $\mathcal{P}$.