Devoir surveillé
lundi 15 octobre 2018

☐ Aix-Montperrin
☐ Luminy
☐ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert
☒ Espe

Préparation au Capes de mathématiques, master Meef, 1re année
Géométrie

Deux heures, ni calculatrices ni documents

Enseignant : T. Coulbois

Exercice I. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, tracer :

1. Les points $A(2,3)$, $B(-4,1)$, $C(1,-4)$.

2. Les droites d'équation $y = 2x - 1$, $x - 3y + 7 = 0$.

Donner : **3.** une équation de la droite (BC) ;

> Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$ sont $(5,-5)$. Une équation de la droite (BC) est donc de la forme $x+y+c=0$ où c est une constante que nous calculons en remplaçant x et y par les coordonnées de B. Une équation de la droite (BC) est $x+y+3=0$.

4. une équation de la droite perpendiculaire à (AB) passant par C ;

> Le vecteur $\overrightarrow{AB}(-6,-2)$ est un vecteur normal à la droite cherchée. En calculant la constante comme précédemment, une équation de la droite perpendiculaire à la droite (AB) passant par C est $3x+y+1=0$

5. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Exercice II. On considère un triangle ABC rectangle en C et H le pied de la hauteur issue de C.

1. Démontrer que les triangles ABC et BCH sont semblables.

> BCH est un triangle rectangle en H. L'angle en B est un angle des deux triangles ABC et BCH. Les triangles ABC et BCH ont deux angles égaux, comme la somme des angles d'un triangle est toujours π, nous en déduisons que les triangles ABC et BCH ont leurs trois angles égaux : $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{HC},\overrightarrow{HB})$, $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BH})$ et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CH})$ (ici ce sont des mesures géométriques des angles entre 0 et π).
> Les triangles ABC et BCH sont donc semblables.

2. Dessiner l'image du trinagle BCH par l'homothétie h de centre B et de rapport $\dfrac{AB}{BC}$.

3. Soit $\mathcal{D}$ la bissectrice de l'angle en B, et $s_{\mathcal{D}}$ la symétrie axiale par rapport à $\mathcal{D}$. Démontrer que l'image du triangle BCH par $s_{\mathcal{D}} \circ h$ est le triangle ABC

> Les droites (BC) et (BA) sont globalement invariantes par l'homothétie h car elles passent par le centre. La symétrie $s_{\mathcal{D}}$ échange ses deux droites et laisse le point B fixe.
> Le point C est donc envoyé par $s_{\mathcal{D}} \circ h$ en un point de la demi-droite $[BA)$ à distance AB de B, donc $s_{\mathcal{D}}(h(C)) = A$.
> Le point h est envoyé par cette similitude en un point H' de la droite (BC) tel que l'angle $AH'B$ est égal à l'angle BHC donc droit. Ce qui démontre que H est envoyé sur C.
>
> $$\begin{array}{ccc} & s_{\mathcal{D}} \circ h & \\ B & \mapsto & B \\ C & \mapsto & A \\ H & \mapsto & C \end{array}$$

Exercice III. On considère trois points A, B et C non-alignés du plan, et le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

1. Déterminer les coordonnées des milieux I du segment $[BC]$, J du segment $[AC]$ et K du segment $[AB]$.

> Par rapport au repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, les coordonnées des points sont $A(0,0)$, $B(1,0)$ et $C(0,1)$. Les coordonnées des milieux sont les moyennes des coordonnées donc $I(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $J(0,\frac{1}{2})$ et $K(\frac{1}{2},0)$.

2. Démontrer que la droite d'équation $x + 2y - 1 = 0$ est la droite (BJ).

> Grâce à la question précédente nous vérifions facilement que les coordonnées des points B et J satisfont l'équation proposée. La droite d'équation $x+2y-1=0$ passe par les points distincts B et J, elle est donc égale à la droite (BJ).

3. Donner l'équation de la droite (AI).

> C'est une droite qui passe par l'origine du repère et de pente 1. Une équation de la droite (AI) est donc $y = x$.

4. Démontrer que les trois médianes du triangle ABC sont concourantes.

Nous résolvons facilement le système d'équation formé des équations des droites (AI) et (BJ), nous trouvons que les coordonnées du point $G(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ intersection de ces deux droites.
Une équation de la droite (CK) est $2x + y - 1 = 0$ qui passe elle aussi par G.
Les trois médianes (AI), (BJ) et (CK) sont donc concourantes au point G.
Remarquons que nous obtenons facilement à partir des coordonnées : $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ ainsi que les autres égalités similaires : le centre de gravité est au $\frac{2}{3}$ de chaque médiane.

5. Démontrer que les trois médianes d'un triangle non-dégénéré sont concourantes.

Les calculs précédents sont valables pour n'importe quel triangle non dégénéré. Nous avons donc démontré que les médianes y sont concourantes.

Étudiant-es de l'option **mathématique**.

Exercice IV. Trois triangles équilatéraux ABC', ACB' et BCA' sont construits extérieurement sur les côtés d'un triangle quelconque ABC.

1. En utilisant la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$, démontrer que $AA' = CC'$.

Comme le triangle BCA' est équilatéral la rotation $R_{B,\pi/3}$ de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$ transforme C en A'. De même comme le triangle ABC' est équilatéral $R_{B,\pi/3} : C' \mapsto A$. Attention, il faut pour cela remarquer que les triangles BCA' et ABC' ont la même orientation (l'orientation inverse de ABC), nous supposons donc ici que ABC est orienté dans le sens horaire.
Une rotation est une isométrie, donc $AA' = CC'$.

2. Démontrer que $AA' = BB' = CC'$.

En utilisant de même la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ nous démontrerions que $BB' = CC'$ et donc par transitivité de l'égalité les égalités demandées.

3. En utilisant la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{6}$ composée avec l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{\sqrt{3}}{3}$, démontrer que le triangle PQR formé par les centres des trois triangles équilatéraux (respectivement BCA', ACB' et ABC') est un triangle équilatéral.

La droite (BP) est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{CBA}$ (et cet angle a pour mesure $\frac{\pi}{3}$), donc la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{6}$ transforme la demi-droite $[BC)$ en la demi-droite $[BP)$. La droite (BP) est aussi la hauteur et la médiatrice du triangle équilatéral BCA', donc en utilisant le théorème de Pythagore, $BP = \frac{\sqrt{3}}{3}BC$. Nous concluons que $h_{\sqrt{3}/3} \circ R_{B,\pi/6}(C) = P$.
De même nous montrerions que cette même transformation envoie C' sur R. Comme la rotation est une isométrie et que l'homothétie multiplie les distances par son coefficient : $PR = \frac{\sqrt{3}}{3}CC'$.
Par permutation circulaire des lettres nous obtiendrions que $PQ = \frac{\sqrt{3}}{3}AA'$ et $QR = \frac{\sqrt{3}}{3}BB'$.
En utilisant la question précédente nous concluons que $PQ = QR = PR$: le triangle PQR est équilatéral.

Exercice V.
Dans un plan affine euclidien orienté, on considère deux points distinct A et B et un point M n'appartenant pas à la droite (AB).
Pour chacune des assertions suivantes, déterminer s'il existe un point C qui la vérifie. *On précisera pour chaque cas le nombre de solutions et on prendra soin de fournir toutes les explications et justifications utiles.*

1. M est le centre de gravité du triangle (ABC).

   Le centre de gravité est au $\frac{1}{3}$ de la médiane. Considérons donc le milieu K du segment $[AB]$. Alors M est le centre de gravité du triangle ABC si, et seulement si, le point C est l'unique point du plan tel que $\overrightarrow{KC} = 3\overrightarrow{KM}$.

2. M est le centre du cercle circonscrit au triangle (ABC).

   Pour que M soit le centre d'un cercle passant par A et B il faut que $AM = BM$ ou de manière équivalente que M appartienne à la médiatrice du segment $[AB]$.
   Réciproquement pour tout point M de la médiatrice du segment $[AB]$, pour tout point C du cercle de centre M passant par A (et donc par B), M est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Pour un point M donné n'y a donc pas de point C solution (si C n'est pas sur la médiatrice du segment $[AB]$) ou bien une infinité de points C solution (les points C du cercle de centre M passant par A, sauf A et B).

3. M est l'orthocentre du triangle (ABC).

Si M est l'orthocentre du triangle ABC alors (CM) est la hauteur issue de C, donc C appartient à la droite $\mathcal{D}_1$ perpendiculaire à la droite (AB) passant par M. De même (AM) est une hauteur donc la droite (BC) est perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}_2$ perpendiculaire à (AM) passant par B.
Réciproquement, les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes en un point C. Le point M est l'intersection des hauteurs isssues de A et C du triangle ABC, c'en est donc l'orthocentre.
Le point C intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est l'unique point du plan tel que M est l'orthocentre du triangle ABC.

4. M est le centre du cercle inscrit au triangle (ABC).

Si M est le centre du cercle inscrit du triangle ABC alors la droite (AM) est la bissectrice intérieure de l'angle en A et la droite (AC) est la droite $\mathcal{D}_1$ symétrique de la droite (AB) par rapport à cette bissectrice (AM).
De même C appartient à la droite $\mathcal{D}_2$ symétrique de la droite (AB) par rapport à la droite (BM).
Le point C est donc l'intersection de la droite $\mathcal{D}_1$ et de la droite $\mathcal{D}_2$.
De plus comme les bissectrices doivent être des bissectrices intérieures, nous obtenons que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$, il est donc nécessaire que l'angle $\widehat{BAM}$ soit aigu. De même l'angle $\widehat{ABM}$ doit être aigu. Finalement la somme des angles géométriques $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ABC}$ est strictement inférieure à π, donc l'angle $\widehat{AMB}$ est aussi obtu.
Nous obtenons comme condition nécessaire que le triangle ABM est obtu.
Réciproquement, pour tout point M hors de la droite (AB) tel que le triangle ABM soit obtu, il existe un unique point C intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ tel que M soit le centre du cercle inscrit du triangle ABC.