Exercice I. Dans le plan rapporté à un repère, tracer :
1. Les points $A(2,5)$, $B(-4,1)$, $C(6,-1)$. **2.** Les droites d'équation $y = 2x - 1$, $y = -5x + 31$ et $x - 5y - 27 = 0$.
Donner : **3.** une équation de la droite (AB) ; **4.** une équation de la droite perpendiculaire à (AB) passant par C ;

$(AB) : 2x - 3y = -11$.

Nous remarquons que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires (en A). La droite (AC), d'équation $3x+2y = 16$, est donc la perpendiculaire à (AB) passant par C.

5. Les coordonnées de l'intersection de ces deux droites.

Les droites (AB) et (AC) se coupent au point $A(2,5)$.

Exercice II. **1.** Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Ces vecteurs sont-ils colinéaires ?

$\overrightarrow{AB}(-6,-4)$ et $\overrightarrow{AC}(4,-6)$. En calculant le déterminant formé par leurs coordonnées, $-6\times(-6)-4\times(-4) = 52 \neq 0$ nous vérifions par le calcul qu'ils ne sont pas colinéaires, ce qui est clair sur la figure.

2. Exprimer le vecteur $\vec{u}(2,2)$ comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Nous cherchons des nombres réels x et y tels que $\vec{u} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$. Cela nous donne un système de deux équations à deux inconnues :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -6x+4y &=& 2 \\ -4x-6y &=& 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -3x+2y &=& 1 \\ 2x-3y &=& 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -3x+2y &=& 1 \\ -5x &=& 5\ (3L_1+2L_2) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -1 \\ y &=& -1 \end{array}\right.$$

Nous trouvons donc une unique manière d'exprimer le vecteur $\vec{u}$en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\vec{u} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.$$

3. Démontrer que les vecteurs $\vec{u}(2,2)$, $\vec{v}(1,-3)$ et $\vec{w}(-3,2)$ ne forment pas une famille libre.

Trois vecteurs du plan ne peuvent pas former une famille libre. Nous remarquons par exemple que $10\vec{v}+8\vec{w} = -7\vec{u}$.

Exercice III. **1.** Parmi les points suivants lesquels sont alignés ?

$$A = (1,2) \quad B = (\frac{29}{5}, \frac{31}{7}) \quad C = (2, \frac{5}{2}) \quad D = (-1,-2) \quad E = (-\sqrt{12}+1, -\sqrt{3}+2)$$

Nous constatons sur la figure que le point D n'est aligné avec aucune paire des autres points. Nous vérifions que A, C, E sont alignés par le calcul : $\overrightarrow{AC}(1, \frac{1}{2})$ et $\overrightarrow{AE}(-2\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = -2\sqrt{3}\overrightarrow{AC}$. Enfin toujours par le calcul nous vérifions que le point B n'est pas sur la droite formée par les trois points A, C et E : $\overrightarrow{AB}(\frac{24}{5}, \frac{17}{7})$ et le déterminant formé par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est $1 \times \frac{17}{7} - \frac{1}{2} \times \frac{24}{5} = \frac{1}{35} \neq 0$. Ces deux vecteurs ne sont donc pas colinéaires (remarquons que le déterminant est très proche de 0 et sur la figure le point B semble aligné avec A, C et E). Les seuls points alignés sont donc A, C et E.

2. Déterminer l'intersection de (AB) et (CD).

Comme nous l'avons remarqué précédemment les droites (AB) et (AC) sont très proches, le point F intersection de (AB) et (CD) est donc très proche de C. Calculons : (AB) : $\frac{17}{7}x - \frac{24}{5}y + \frac{251}{35} = 0$, (CD) : $\frac{9}{2}x - 3y - \frac{3}{2} = 0$ et donc $(AB) \cap (CD) = \{F(\frac{335}{167}, \frac{419}{167})\}$.

Exercice IV. **1.** Parmi les droites suivantes déterminer lesquelles sont parallèles, lesquelles sont concourantes, leurs points d'intersection.

$$D_1 \ : 3x - 2y + 1 = 0 \quad D_2 \ : y = 4x - 7 \quad D_3 \ : \left\{\begin{array}{l} x = 4t+4 \\ y = 6t+3 \end{array}\right. ,t \in \mathbb{R}$$

$$D_4 \ : 5x + y = 20 \quad D_5 \ : 2x + 7y - 41 = 0.$$

Sur notre figure nous constatons que les droites D_1, D_2, D_4, D_5 sont concourantes au point $A(3,5)$ (par le calcul nous vérifions facilement que le point A appartient à chacune de ces quatre droites en remplaçant ses coordonnées dans chacune des équations). Les droites D_1 et D_3 sont parallèles, $D_2 \cap D_3 = \{C(\frac{8}{5}, \frac{-3}{5})\}$, $D_3 \cap D_4 = \{E(\frac{46}{13}, \frac{30}{13})\}$, $D_3 \cap D_5 = \{F(\frac{124}{25}, \frac{111}{25})\}$.

2. Donner les coordonnées du projeté orthogonal de $A(3,5)$ sur D_3.

$G = (\frac{60}{13}, \frac{51}{13})$

3. Déterminer la distance entre les droites D_1 et D_3.

$d(D_1, D_3) = AG = \frac{7}{\sqrt{13}} = \frac{7\sqrt{13}}{13}$.

4. Déterminer les équations de la parallèle et de la perpendiculaire à D_2 passant par $B = (-1, 0)$.

Un vecteur directeur de la droite D_2 a pour coordonnées $(1, 4)$. La droite parallèle à D_2 passant par B admet donc pour équation $y = 4x + 4$ et la droite perpendiculaire à D_2 passant par B : $x + 4y + 1 = 0$.

Exercice V. Soit λ un réel non nul.

1. Donner l'équation de la droite D_λ passant par les points $A_\lambda = (\frac{1}{\lambda}, 0)$ et $B_\lambda = (0, \lambda)$.

$D_\lambda : \lambda x + \frac{1}{\lambda} y - 1 = 0$

2. Soit $M = (x, y)$ un point du plan. Donner tous les λ tels que $M \in D_\lambda$.

Les paramètres λ tels que $M \in D_\lambda$ vérifient l'équation $\lambda x + \frac{1}{\lambda} y - 1 = 0$ (attention ici, x et y sont données et λ est l'inconnue). Comme $\lambda \neq 0$ cette équation est équivalente à $x\lambda^2 - \lambda + y = 0$. Si $x \neq 0$, c'est une équation en λ de degré 2, nous pouvons calculer son discriminant : si $\Delta = 1 - 4xy \geq 0$ on a $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1-4xy}}{2x}$. Si $x \neq 0$ et $\Delta = 1 - 4xy < 0$, M n'appartient à aucune droite D_λ. Si $x = 0$, c'est une équation de degré 1 qui a une unique solution : $\lambda = y$, remarquons que dans ce cas $1 - 4xy = 1 \geq 0$. Attention si $x = 0$ et $y = 0$ l'unique solution $\lambda = 0$ n'est pas acceptable donc dans ce cas le point M n'appartient à aucune droite D_λ.

3. Décrire $\cup_{\lambda \in \mathbb{R}^\star} D_\lambda$.

D'après la question précédente, un point $M(x, y)$ appartient à au moins une droite D_λ si, et seulement si $1 - 4xy \geq 0$ et $(x, y) \neq (0, 0)$. La réunion des droites D_λ est donc la région du plan comprise entre les deux branches de l'hyperbole $y = \frac{1}{4x}$ privée de l'origine.

Exercice VI. Démontrer que trois points du plan $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ et $C(x_C, y_C)$ sont alignés si, et seulement si, le déterminant $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$ est nul.

Raisonnons par équivalence : les points A, B et C sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$ sont colinéaires et cela est équivalent à la nullité du déterminant : $0 = \begin{vmatrix} x_B - x_A & x_C - x_A \\ y_B - y_A & y_C - y_A \end{vmatrix}$.
Calculons maintenant le déterminant proposé :

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B - x_A & y_B - y_A & 0 \\ x_C - x_A & y_C - y_A & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_B - x_A & x_C - x_A \\ y_B - y_A & y_C - y_A \end{vmatrix}$$

(la première égalité est obtenue en soustrayant la première ligne à chacune des deux autres, la deuxième égalité est obtenue en développant par rapport à la troisième colonne). Nous avons donc démontré que les points A, B et C sont alignés si, et seulement si, le déterminant proposé est nul.

Exercice VII. Pour un paramètre réel m on considère la droite D_m d'équation

$$3mx + (1 - 2m)y - 3 = 0.$$

1. Démontrer que, lorsque le paramètre m varie, les droites D_m sont concourantes en un point A que l'on déterminera.

Pour $m = 0$ nous obtenons la droite $D_0 : y = 3$ et pour $m = \frac{1}{2}$ la droite $D_{\frac{1}{2}} : x = 2$, ces deux droites s'intersectent au point A de coordonnées $(2, 3)$.
Pour tout paramètre réel m, en remplaçant dans l'équation de D_m : $3m \times 2 + (1 - 2m) \times 3 - 3 = 6m + 3 - 6m - 3 = 0$ ce qui démontre que le point A appartient à la droite D_m. Nous avons donc démontré que les droites D_m sont concourrantes au point $A(2, 3)$.

2. Quelle est l'unique droite passant par A qui n'appartient pas à la famille $(D_m)_{m \in \mathbb{R}}$?

La droite d'équation $3x - 2y = 0$ passe par A, mais elle n'est pas dans la famille des droites $(D_m)_{m \in \mathbb{R}}$. Elle correspondrait à la valeur $m = \infty$ qui n'est pas un réel. En effet aucune droite D_m ne passe par l'origine puisque le terme constant (-3) dans l'équation de cette droite n'est pas nul.

3. Pour les différentes valeurs du paramètre m, déterminer les positions reatives de la droite D_m et de la droite Δ_m d'équation : $-4x + my + 2 = 0$.

Pour un paramètre réel m résolvons le système formé par les équations de D_m et Δ_m :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3mx + (1 - 2m)y - 3 & = & 0 \\ -4x + my + 2 & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcll} -4x + my + 2 & = & 0 & (L_2) \\ (3m^2 - 8m + 4)y & = & 12 - 6m & (4L_1 + 3mL_2) \end{array} \right.$$

Le polynôme de degré 2 : $3m^2 - 8m + 4$ admet 2 comme racine évidente et la deuxième racine est $\frac{2}{3}$.
Si $m \neq 2$ et $m \neq \frac{2}{3}$ alors les droites D_m et Δ_m sont sécantes (au point $B_m(\frac{1}{2-3m}, \frac{6}{2-3m})$).
Si $m = 2$ alors les droites $D_2 : 6x - 3y - 3 = 0$ et $\Delta_2 : -4x + 2y + 2 = 0$ sont égales : $D_2 = \Delta_2$.
Si $m = \frac{2}{3}$, les droites $D_{\frac{2}{3}} : 2x - \frac{1}{3}y - 3 = 0$ et $\Delta_{\frac{2}{3}} : -4x + \frac{2}{3}y + 2 = 0$ sont strictement parallèles.

Exercice VIII. Soit A et B deux points distincts du plan et $k \in \mathbb{R}$. Déterminez les ensembles des points M tels que

1. $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB} = k$; **2.** $\dfrac{MA}{MB} = k$; **3.** $MA + MB = k$.

Cet exercice est plus difficile et demande quelques intuitions.

$\underline{\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB} = k}$: Soit I le milieu du segment $[AB]$. En utilisant la relation de Chasles et la bilinéarité du produit scalaire, nous calculons $(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})\,.\,(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = MI^2 + \overrightarrow{MI}\,.\,(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA}\,.\,\overrightarrow{IB}$. Par définition du milieu $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{IA}\,.\,\overrightarrow{IB} = -\frac{1}{4}AB^2$, l'équation devient $MI^2 = k - \frac{1}{4}AB^2$.

Si $k \geq \frac{1}{4}AB^2$ alors l'ensemble des points M est le cercle de centre I milieu de $[AB]$ et de rayon $\sqrt{k - \frac{1}{4}AB^2}$.
Sinon il n'y a pas de points M solution.

$\underline{\frac{MA}{MB} = k}$: Remarquons d'abord que si $k < 0$ il n'y a pas de solution et si $k = 1$ alors l'équation s'écrit $MA = MB$, c'est l'ensemble des points M équidistants de A et de B : c'est la médiatrice du segment $[AB]$.
Si $k \geq 0$ nous pouvons élever au carré et

$$\frac{MA}{MB} = k \iff \frac{MA^2}{MB^2} = k^2 \iff MA^2 - k^2MB^2 = 0 \iff \overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MA} - k^2\overrightarrow{MB}\,.\,\overrightarrow{MB} = 0$$

$$\iff (\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB})\,.\,(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}) = 0.$$

Si $k \geq 0$ et $k \neq 1$ nous pouvons considérer les barycentres G de $\{(A,1),(B,k)\}$ et H de $\{(A,1),(B,-k)\}$, l'équation devient alors

$$(1+k)\overrightarrow{MG}\,.\,(1-k)\overrightarrow{MH} = 0 \iff \overrightarrow{MG}\,.\,\overrightarrow{MH} = 0 \iff \overrightarrow{MG} \perp \overrightarrow{MH} = 0$$

L'ensemble des points M solution est donc le cercle de diamètre $[GH]$.

$\underline{MA + MB = k}$: Remarquons d'abord que si $k < AB$ alors il n'y a pas de points M solution et si $k = AB$ alors le segment $[AB]$ est l'ensemble des solutions.
Enfin, notre culture mathématique nous apprend que si $k > AB$, c'est une ellipse dont A et B sont les foyers.

4. Donnez les équations des tangentes à la conique trouvée précédemment.

5. $MA^2 + MB^2 = k$; **6.** $|MA^2 - MB^2| = k$.

$\underline{MA^2 + MB^2 = k}$: Considérons le milieu I du segment $[AB]$ comme ci-dessus. Calculons alors :

$$MA^2 + MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})\,.\,(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})\,.\,(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

Si $k \geq \frac{1}{2}AB^2$ alors l'ensemble cherché est le cercle de centre I milieu de $[AB]$ et de rayon $\sqrt{\frac{k}{2} - \frac{1}{4}AB^2}$.
Sinon, l'ensemble solution est vide.

$\underline{|MA^2 - MB^2| = k}$: Remarquons d'abord que si $k < 0$ il n'y a pas de solutions.
Calculons :

$$|MA^2 - MB^2| = |\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\,.\,\overrightarrow{MB}| = |(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})\,.\,(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})| = |\overrightarrow{BA}\,.\,2\overrightarrow{MI}|$$

où I est toujours le milieu de $[AB]$.
Soit G le point tel que $\overrightarrow{IG} = \frac{k}{2AB^2}\overrightarrow{AB}$ et H le point tel que $\overrightarrow{IH} = -\frac{k}{2AB^2}\overrightarrow{AB}$. Alors

$$\overrightarrow{BA}\,.\,2\overrightarrow{MI} = 2\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{MG} + k \text{ et } \overrightarrow{BA}\,.\,2\overrightarrow{MI} = 2\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{MG} - k.$$

Comme $k \geq 0$ l'équation devient

$$|MA^2 - MB^2| = k \iff \left\{ \begin{array}{c} MA^2 - MB^2 = k \\ \text{ou} \\ MA^2 - MB^2 = -k \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{MG} = 0 \\ \text{ou} \\ \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{MH} = 0 \end{array} \right.$$

L'ensemble des solutions est la réunion des droites perpendiculaires à la droite (AB) passant par G et H (ces deux droites sont confondues si $k = 0$.)

Exercice IX. Dans le plan rapporté à un repère euclidien on considère la droite D d'équation $2x - 3y = 5$. Soit $M(x_0, y_0)$ un point du plan. Déterminer les coordonnées des points

1. $M_1 = p(M_0)$ le projeté orthogonal de M_0 sur la droite D ;

Les coordonnées $M_1(x_1, y_1)$ vérifient l'équation de D et le vecteur $\overrightarrow{M_0M_1}$ est normal au vecteur directeur $\vec{u}(3,2)$ de la droite D : $\overrightarrow{M_0M_1}..\vec{u} = 3(x_1 - x_0) + 2(y_1 - y_0) = 0$. Nous pouvons donc écrire le système d'équation :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 - 3y_1 &=& 5 \\ 3x_1 + 2y_1 &=& 3x_0 + 2y_0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 - 3y_1 &=& 5 \\ 13x_1 &=& 10 + 9x_0 + 6y_0 \quad (2L_1 + 3L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 &=& \frac{1}{13}(9x_0 + 6y_0 + 10) \\ y_1 &=& \frac{1}{13}(6x_0 + 4y_0 - 15) \end{array}\right.$$

2. $M_2 = s(M_0)$ le symétrique de M_0 par rapport à la droite D.

Le point M est défini par l'égalité vectoriel : $\overrightarrow{M_0M_2} = 2\overrightarrow{M_0M_1}$. Donc en reprenant les calculs de la question précédente ses coordonnées $M_2(x_2, y_2)$ vérifient

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_2 &=& x_0 + 2(x_1 - x_0) = \frac{1}{13}(5x_0 + 12y_0 + 20) \\ y_2 &=& y_0 + 2(y_1 - y_0) = \frac{1}{13}(12x_0 - 5y_0 - 30) \end{array}\right.$$

Remarquons, à titre de vérification, que la matrice obtenue $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}$ est bien orthogonale.

Exercice X. **1.** Donner une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(1,2)$ passant par $B(4,-2)$.

Calculons d'abord le rayon $AB = \sqrt{3^2+4^2} = 5$, une équation cartésienne est donc $\mathcal{C} : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$.

2. Donner une équation cartésienne de la tangente au cercle $\mathcal{C}$ passant par B.

La tangente au cercle est perpendiculaire au rayon, son équation est donc donnée par $M \in T \iff \overrightarrow{BM} \,.\, \overrightarrow{AB} = 0$ soit en utilisant les coordonnées (x,y) de M : $3(x-4) - 4(y+2) = 0$.

3. Donner les équations des tangentes au cercle $\mathcal{C}$ passant par le point $D(8,3)$.

La distance $AD = \sqrt{7^2+1^2} = \sqrt{50} > 7$ est plus grande que le rayon, donc le point D est extérieur au cercle $\mathcal{C}$. Il y a donc deux tangentes au cercle passant par D.
En effectuant une figure soignée, nous constatons que les points de tangences de ces deux droites sont les points $E(4,6)$ et $F(5,-1)$. Nous pouvons alors calculer des équations des droites $(DE) : 3x+4y = 36$ et $(DF) : 4x-3y = 23$.
Par le calcul une droite Δ_λ passant par D et non-verticale a une équation de la forme $y = \lambda x + 3 - 8\lambda$ où λ est un paramètre réel. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, les intersections de la droite Δ_λ et $\mathcal{C}$ ont pour coordonnées (x,y) qui vérifient

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \lambda x + 3 - 8\lambda \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25 \end{array} \right.$$

En substituant dans la deuxième équation nous obtenons

$$(x-1)^2 + (\lambda x + 3 - 8\lambda - 2)^2 = 25 \iff (\lambda^2+1)x^2 + (-2+2\lambda-16\lambda^2)x - 23 - 16\lambda + 64\lambda^2 = 0$$

ce qui est une équation de degré 2 en x. Cette équation possède une unique solution si, et seulement si, son discriminant réduit

$$\Delta' = (-1+\lambda-8\lambda^2)^2 - (\lambda^2+1)(-23-16\lambda+64\lambda^2) = -24\lambda^2+14\lambda+24 = 0 \iff \lambda = \frac{7 \pm 25}{24} \iff \lambda = \frac{4}{3} \text{ ou } \lambda = \frac{-3}{4}$$

Les droites Δ_λ tangentes au cercle $\mathcal{C}$ sont donc les droites $\Delta_{\frac{4}{3}} : y = \frac{4}{3}x - \frac{23}{3}$ et $\Delta_{\frac{-3}{4}} : y = \frac{-3}{4}x + 9$. Ce sont les deux tangentes au cercles $\mathcal{C}$ passant par le point D.

Exercice XI. **1.** On considère la droite D d'équation $y = 2x-3$. Soit H le projeté orthogonal de O sur D. Soit M un point quelconque de la droite D.

a. Dans le triangle OMH exprimer OM en fonction de l'angle $\theta = (O, \vec{i}, \overrightarrow{OM})$.

Dans le triangle OMH rectangle en H, $OH = OM \cos(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OM})$ (notons que l'angle $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OM})$ est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$). En utilisant la relation de Chasles pour les angles : $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OH}, \vec{\imath}) + (\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OH}, \vec{\imath}) + \theta$. Ainsi

$$OM = \frac{OH}{\cos((\overrightarrow{OH}, \vec{\imath}) + \theta)} = \frac{OH}{\cos((\overrightarrow{OH}, \vec{\imath}))\cos\theta - \sin((\overrightarrow{OH}, \vec{\imath}))\sin\theta}$$

b. En déduire une une équation polaire de la droite D – c'est-à-dire exprimer $r = OM$ en fonction de θ.

D'après la question précédente et en posant $\alpha = (\overrightarrow{OH}, \vec{\imath})$, une équation polaire de la droite D est

$$r = \frac{OH}{\cos(\alpha+\theta)} \quad \text{où } \theta \in]-\frac{\pi}{2} - \alpha ; \frac{\pi}{2} - \alpha[$$

2. Donner l'équation polaire d'une droite ne passant pas par l'origine.

Les calculs précédents s'appliquent à toute droite D ne passant pas par l'origine.

3. Donner l'équation polaire d'un cercle centré sur l'axe des abscisses et passant par l'origine.

Soit A l'autre point d'intersection du cercle et de l'axe des abscisses. Alors pour tout point M du cercle le triangle OMA est rectangle en M et donc en considérant l'angle $\theta = (\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$, nous obtenons : $r = OM = AO\cos\theta$ qui est l'équation polaire du cercle.

Exercice XII. **1.** Démontrer que par trois points non-alignés du plan euclidien il passe exactement un cercle.

Soit A, B et C trois points non-alignés du plan (en particulier ils sont deux à deux distincts). Soit $\mathcal{D}$ la médiatrice du segment $[AB]$ et $\mathcal{D}'$ celle du segment $[AC]$. Les droites (AB) et (AC) sont sécantes donc leurs perpendiculaires $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont aussi sécantes en un point Ω. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre Ω passant par A. Alors $\mathcal{C}$ passe par A, B et C.
En effet la médiatrice $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points équidistants de A et B donc $\Omega A = \Omega B$ et de même $\Omega A = \Omega C$.
Par transitivité $\Omega A = \Omega B = \Omega C$ et cette distance est le rayon de $\mathcal{C}$.
Démontrons maintenant que ce cercle est unique. Soit $\mathcal{C}'$ un autre cercle passant par A, B et C et soit Ω' son centre.
Alors $\Omega' A = \Omega' B = \Omega' C$ et cette longueur est le rayon de $\mathcal{C}'$. Nous en déduisons que Ω' est un point commun des médiatrices $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ (et de la médiatrice de $[BC]$). Nous avons démontré que les médiatrices $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes en Ω, donc $\Omega = \Omega'$. Finalement le rayon de $\mathcal{C}'$ est $\Omega' A = \Omega A$ et est égal au rayon de $\mathcal{C}$. Les cercles $\mathcal{C}$ ont même centre et même rayon ils sont donc égaux.
Nous avons donc montré l'existence et l'unicité du cercle $\mathcal{C}$ qui passe par les trois points non-alignés A, B et C.

2. Le plan euclidien est muni d'un d'un repère orthonormé. On considère les points $A(5,5)$, $B(-1,5)$ et $C(-2,-2)$.

a. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Un rapide calcul nous donne les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB} : \begin{pmatrix}-6\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} : \begin{pmatrix}-7\\-7\end{pmatrix}$. Ces vecteurs ne sont donc pas colinéaires (le déterminant est $-6\times(-7)-0\times(-7)=42\neq 0$) et les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. Déterminer le cercle passant par A, B et C.

Plusieurs méthodes sont possible.

1/ Si la figure est faite soigneusement, on peut y lire que le centre du cercle est le point $\Omega : \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et on peut vérifier par le calcul que

$$\Omega A=\sqrt{(5-2)^2+(5-1)^2}=5=\Omega B=\sqrt{(2-(-1))^2+(1-5)^2}=\Omega C=\sqrt{(2-(-2))^2+(1-(-2))^2}$$

Donc le cercle de centre $\Omega : \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et de rayon 5 passe par les points A, B et C.

2/ <u>Deuxième méthode :</u> Soit $I : \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ le milieu de $[AB]$. La médiatrice $\mathcal{D}$ de $[AB]$ est la droite orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ passant par I. Un point $M : \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{D}$ si, et seulement si,

$$\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \iff (x-2)\times(-6)+(y-5)\times 0=0 \iff x=2.$$

De même en considérant le milieu $J : \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ de $[AC]$, la médiatrice $\mathcal{D}'$ de $[AC]$ a pour équation

$$(x-\frac{3}{2})\times(-7)+(y-\frac{3}{2})\times(-7)=0 \iff x+y-3=0.$$

Nous obtenons donc que le point Ω d'intersection de ces deux médiatrices a pour coordonnées $\Omega : \big(2,1\big)$.
Nous pouvons alors calculer le rayon du cercle qui est la distance commune $\Omega A=\Omega B=\Omega C=\sqrt{(5-2)^2+(5-1)^2}=5$. Donc le cercle de centre $\Omega : \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et de rayon 5 passe par les points A, B et C.

3. Démontrer que le cercle de centre $D(4,2)$ et de rayon $5-\sqrt{5}$ est tangent au cercle de la question précédente.

Nous constatons que $\Omega D+(5-\sqrt{5})=\sqrt{(4-2)^2+(2-1)^2}+(5-\sqrt{5})=5$, les deux cercles sont donc tangents.
Le point de tangence T est le point de la demi-droite $[\Omega D)$ tel que $\Omega T=5$. Un rapide calcul nous donne $T : \begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$.

<u>Autre méthode :</u> Par le calcul, nous savons que le coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ des points d'intersections des deux cercles vérifient :

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-1)^2=25\\(x-4)^2+(y-2)^2=(5-\sqrt{5})^2=30-10\sqrt{5}\end{cases}$$

Résolvons ce système d'équation :

$$\iff \begin{cases}(x-2)^2+(y-1)^2=25\\4x+2y=10\sqrt{5}\ (L1-L2)\end{cases} \iff \begin{cases}(x-2)^2+((5+5\sqrt{5}-2x)-1)^2=25\\y=5+5\sqrt{5}-2x\end{cases}$$

Résolvons l'équation de degré 2 de la première ligne :

$$5x^2-4(1+5+5\sqrt{5}-1)x+4+(4+5\sqrt{5})^2=25 \iff x^2-4(1+\sqrt{5})x+24+8\sqrt{5}=0$$

le discrimant (réduit) est $\Delta'=4(1+\sqrt{5})^2-(24+8\sqrt{5})=0$ l'équation a donc une unique racine double $x=2(1+\sqrt{5})$ et les cercles ont un unique point commun $T\begin{pmatrix}2(1+\sqrt{5})\\1+\sqrt{5}\end{pmatrix}$: ils sont tangents.

Exercice XIII. Dans le plan affine euclidien muni du repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $3x+4y-7=0$ et le point A de coordonnées $(4,5)$.

1. Faire une figure.

2. Donner un vecteur directeur u et un vecteur normal n de $\mathcal{D}$.

$u(-4,3)$ et $n(3,4)$.

3. soit $H(x,y)$ un point du plan. À quelle condition sur x et y les droites (AH) et $\mathcal{D}$ sont-elles perpendiculaires ?

Le vecteur $\overrightarrow{AH}$ a pour coordonnées $(x-4,y-5)$; il est orhtogonal à u si, et seulement si, le produit scalaire $u.\overrightarrow{AH}=-4(x-4)+3(y-5)=-4x+3y+1=0$.

4. Donner les coordonnées de B projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$.

Les coordonnées de B vérifient l'équation de $\mathcal{D}$ et la condition trouvée à la question précédente. Elles sont donc solution du système

$$\left\{\begin{array}{rcl} -4x+3y+1 & = & 0 \\ \\ 3x+4y-7 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Ce système admet une unique solution $x=1$ et $y=1$. Les coordonnées de B sont donc $(1,1)$.

5. Soit $M(x,y)$ un point du plan, calculer les distances AM et $d(M,\mathcal{D})$ en fonction de x et y.

Nous savons que $AM = \|\overrightarrow{AM}\| = \sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}$. Nous connaissons aussi la formule $d(A,\mathcal{D}) = \frac{|3x+4y-7|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{1}{5}|3x+4y-7|$.

6. Donner une équation de l'ensemble $\mathcal{P}$ des points équidistants de A et $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{P} = \{M \mid AM = d(\mathcal{D},M)\}.$$

$\mathcal{P}$ a donc pour équation (en élevant au carré les deux quantités trouvées précédemment)

$$(3x+4y-7)^2 = 25((x-4)^2+(y-5)^2) \iff 16x^2+9y^2-24xy-158x-194y+976=0.$$

On considère le point $\Omega(1,1)$ et les vecteurs $e(\frac{-4}{5},\frac{3}{5})$ et $f(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$.

7. Montrer que (Ω,e,f) est un repère orthonormé.

On vérifie facilement que $\|e\| = \|f\| = 1$ et que $e.f=0$.

8. Donner une équation de $\mathcal{D}$ et les coordonnées de A dans le repère (Ω,e,f).

$\mathcal{D}$ est l'axe des abscisses du nouveau repère donc d'équation $X=0$ et $\overrightarrow{\Omega A} = 5f$ donc A a pour coordonnées $(0,5)$ (il est sur l'axe des ordonnées).

9. En déduire une équation de $\mathcal{P}$, l'ensemble des points équidistants de A et $\mathcal{D}$, dans le repère (Ω,e,f).

Pour un point M de coordonnées (X,Y) dans le repère (Ω,e,f), la distance AM est $AM = \sqrt{X^2+(Y-5)^2}$ et la distance $d(M,\mathcal{D})$ est $d(M,\mathcal{D}) = |Y|$. L'équation de $\mathcal{P}$ est donc $X^2+(Y-5)^2 = Y^2 \iff 10Y = X^2+25$.
Autre méthode. Soit M de coordonnées (x,y) dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et de coordonnées (X,Y) dans le repère (Ω,e,f). Alors on a les relations

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{-4}{5}X+\frac{3}{5}Y+1 \\ \\ y & = & \frac{3}{5}X+\frac{4}{5}Y+1 \end{array}\right. .$$

En remplaçant dans l'équation trouvée à la question précédente on obtient l'équation de $\mathcal{P}$ dans le repère (Ω,e,f) :

$$10Y = X^2+25.$$