**Exercice I.** Soit $ABCDA'B'C'D'$ un cube, $I$, $J$ et $K$ les milieux respectifs de $[AB]$, $[B'C']$ et $[DD']$. Dessiner l'intersection du plan $IJK$ avec le cube. Montrer que c'est un hexagone régulier.

Soit $L$, $M$ et $N$ les milieux respectifs de $[BB']$, $[D'C']$ et $[AD]$. Alors $ILJMKN$ est le polygone d'intersection du plan $IJK$ avec le cube. Démontrons-le.
Les droites $(JL)$ et $(BC)$ sont incluses dans le plan de la face $BCC'B'$. La droite $(JL)$ est sécante à la droite $(B'C')$ qui est parallèle à $(BC)$. Donc les droites $(JL)$ et $(BC)$ sont sécantes en un point $P$.
Les droites $(BP)$ et $(B'J)$ sont parallèles. Les droites $(BB')$ et $(JP)$ sont sécantes en $L$ donc d'après le théorème de THALÈS, $\frac{BP}{B'J} = \frac{BL}{B'L}$ et comme $J$ et $L$ sont les milieux des segments $[B'C']$ et $[B'L]$, nous obtenons que $BP = \frac{1}{2}BC$ et les points $P, B$ et $C$ sont alignés dans cet ordre.
Par le même raisonnement, les droites $(NI)$ et $(BC)$ incluses dans le plan de la face $ABCD$, sont sécantes en un point $P'$ et le théorème de THALÈS pour la configuration formée par les points $A$, $B$, $I$, $N$ et $P$ implique que $BP' = \frac{1}{2}BC$ et les points $P', B$ et $C$ sont alignés dans cet ordre.
Nous déduisons des deux paragraphes précédents que les points $P$ et $P'$ sont égaux. Les droites $(IN)$ et $(JL)$ sont sécantes en $P$ et donc coplanaires.
Avec des raisonnements similaires nous pouvons démontrer que les droites $(IN)$ et $(KM)$ sont sécantes en un point $Q$ (qui est aussi situé sur la droite $(CD)$) et que les droites $(KM)$ et $(JL)$ sont sécantes en un point $R$ (qui appartient aussu à la droite $(CC')$).
Nous pouvons conclure que les points $I$, $J$, $K$, $L$, $M$ et $N$ appartiennent tous au plan $PQR$ qui est donc égal au plan $IJK$. L'intersection du cube et du plan $IJK$ est donc bien l'hexagone $ILJMKN$.
Dans le rectangle $ABC'D'$ le segment des milieux $[IM]$ a la même longueur que les côtés $[AD']$ et $[BC']$ qui sont des diagonales de faces du cube et de plus le milieu de $[IM]$ est le centre $O$ du rectangle qui est aussi le milieu de $[AC']$ et donc le centre du cube. Les trois diagonales $[IM]$, $[JN]$ et $[KL]$ de l'hexagone sont donc concourantes en leur milieu $O$ et de même longueur.
En utilisant le théorème des milieux dans le triangle $ABD$, nous démontrons que $IN = \frac{1}{2}BD$, puis que tous les côtés de cet hexagone ont la même longueur : la moitié de la diagonale des faces.
Des deux paragraphes précédents, nous déduisons $ILJMKN$ est un hexagone régulier.

**Exercice II.** Déterminer une équation cartésienne :

**1.** du plan $\mathcal{P}_1$ passant par $A(1,1,0)$, $B(0,2,2)$ et $C(3,0,3)$ ;

$\mathcal{P}_1 : 5x + 7y - z - 12 = 0$

**2.** du plan $\mathcal{P}_2$ passant par $A$ et parallèle au plan d'équation $3x - 5y + 7z + 3 = 0$ ;

$\mathcal{P}_2 : 3x - 5y + 7z + 2 = 0$

**3.** de la droite $\mathcal{D}_1$ passant par $B$ parallèle aux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

$$\mathcal{D}_1 : \left\{ \begin{array}{rcl} 5x + 7y - z - 12 = 0 \\ 3x - 5y + 7z - 4 & = & 0 \end{array} \right.$$

**4.** Déterminer un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}_2$ intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

$u_2 = (22, -19, -23)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}_2$.

**Exercice III.** Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de du point $A(1,2,3)$ sur :

**1.** le plan $\mathcal{P}$ d'équation $3x - 3y + 2z + 19 = 0$ ;

$H(-2,5,1)$.

**2.** la droite $\mathcal{D}$ passant par $B(-8,10,3)$ et de vecteur directeur $u(-1,3,1)$.

$K(-5,1,0)$.

**Exercice IV.** **1.** Déterminez un système d'équation de la droite $\Delta$ passant par $A = (1,-1,2)$ et coupant les droites :

$$\mathcal{D}_1 \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - y + 3z - 1 & = & 0 \\ x + 2y + z + 2 & = & 0 \end{array} \right. \text{ et } \mathcal{D}_2 \left\{ \begin{array}{rcl} x - y + z + 3 & = & 0 \\ x + 2y + 5z + 1 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Nous constatons que le point $A$ n'appartient pas à la droite $\mathcal{D}_1$ (car $2\times 1-(-1)+3\times 2-1=8\neq 0$), le point $A$ et la droite $\mathcal{D}_1$ déterminent donc un plan $\mathcal{P}_1$.
Les points $B(0,-1,0)$ et $C(-7,0,5)$ sont deux points de la droite $\mathcal{D}_1$ (ces points ont été déterminés en fixant $x=0$ puis en résolvant le système d'équation de $\mathcal{D}_1$, respectivement $y=0$).
Le vecteur $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-8\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\19\\-1\end{pmatrix}$ est donc un vecteur normal du plan $\mathcal{P}_1$ dont une équation cartésienne est $2x+19y-z+19=0$ (la constante a été calculée pour que les coordonnées de $A$ vérifient cette équation).
Nous résolvons le système de trois équations à trois inconnues pour déterminer les coordonnées du point $E$ intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

$$\begin{cases}2x+19y-z+19=0\\ x-y+z+3=0\\ x+2y+5z+1=0\end{cases}\iff\begin{cases}15y-11z=-17\ (L_1-2L_3)\\ 3y+4z=2\ (L_3-L_2)\\ x-y+z=-3\ (L_2)\end{cases}\Rightarrow -31z=-27\ (L_1-5L_2)$$

Nous obtenons : $E(-\frac{-406}{93},\frac{-46}{93},\frac{81}{91})$. Remarquons que nous trouvons un unique point à l'intersection du plan $\mathcal{P}_1$ et de la droite $\mathcal{D}_1$, cette droite et ce plan sont donc sécants.
La droite cherchée est donc la droite $(AE)$ dont un vecteur directeur est $93\overrightarrow{AE}=\begin{pmatrix}-499\\47\\159\end{pmatrix}$ et une équation paramétrique est

$$\Delta:\begin{cases}x=1-499t\\ y=-1+47t\quad t\in\mathbb{R}\\ z=2-159t\end{cases}$$

Alternativement, nous aurions pu calculer comme ci-dessus une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_2$ contenant $A$ et la droite $\mathcal{D}_2$ et obtenir un système d'équations de la droite cherchée comme intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

$$\Delta\begin{cases}2x+19y-z+19&=&0\\ 3x-24y-25z+23&=&0\end{cases}$$

**2.** Déterminer la distance entre les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

Il nous faut déterminer la perpendiculaire commune à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. Un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$ est donné par le produit vectoriel des vecteurs normaux aux deux plans donnés par ses équations :

$$\vec{u}_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\1\\5\end{pmatrix}\quad\text{et de même }\vec{u}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\-4\\3\end{pmatrix}$$

Un vecteur orthogonal aux deux droites est donc

$$\vec{n}=\vec{u}_1\wedge\vec{u}_2=\begin{pmatrix}-7\\1\\5\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-7\\-4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23\\-14\\35\end{pmatrix}$$

Considérons le plan $\mathcal{P}_3$ passant par $B(0,-1,0)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{n}$, c'est le plan contenant la droite $\mathcal{D}_1$ et la perpendiculaire commune aux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. Un vecteur normal au plan $\mathcal{P}_3$ est

$$\vec{n}_3=\vec{u}_1\wedge\vec{n}=\begin{pmatrix}-7\\1\\5\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}23\\-14\\35\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}105\\360\\75\end{pmatrix}=15\begin{pmatrix}7\\24\\5\end{pmatrix}$$

Une équation cartésienne de $\mathcal{P}_3$ est donc $7x+24y+5z+24=0$.
Nous pouvons calculer le point $H$ intersection du plan $\mathcal{P}_3$ et de la droite $\mathcal{D}_2$.
[...]

**Exercice V.** On considère dans l'espace affine euclidien de dimension 3 les points

$$A=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}-2\\2\\7\end{pmatrix}.$$

Caculer le volume du tétraèdre ABCD.

Le tétraèdre est rectangle en $B$ et le volume est $\frac{1}{6}AB\times BC\times BD=21$.
Le volume du tétraèdre peut aussi être calculé comme un sixième du produit mixte des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ (ou toute autre combinaison des vecteurs, il faut prendre la valeur absolue pour avoir un volume non-signé). Ce produit mixte (et ce volume) est aussi le déterminant de ces trois vecteurs (par rapport à la base orthonormée).

**Exercice VI.** Dessiner les cinq polyèdres réguliers en perspective cavalière.

**Exercice VII.** **1.** Déterminer le projeté orthogonal du point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ sur le plan d'équation $2x+2y-z=1$.

Soit $M(x,y,z)$ le projeté orthogonal de $M$ sur le plan. Alors les coordonnées de $M$ vérifient l'équation du plan et les vecteurs $\overrightarrow{MM_0}$ est orthogonal au plan donc colinéaire au vecteur $\vec{n}(2,2,-1)$ normal.

$$\begin{cases} 2x+2y-z=1 \\ x-y=x_0-y_0 \\ y+2z=y_0+2z_0 \end{cases} \iff \begin{cases} x-y=x_0-y_0 \ (L2) \\ y+2z=y_0+2z_0 \ (L3) \\ -9z=1-2x_0-2y_0-8z_0 \ (L1-2L2-4L3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

**2.** Même question avec la droite d'équation $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-z=2 \end{cases}$.

**Exercice VIII.** On considère les droites $D_1$ passant par $A_1(1,2,-1)$ et de vecteur directeur $u_1=(1,1,1)$ et $D_2$ d'équation $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-z=2 \end{cases}$.

**1.** Montrer que $D_1$ et $D_2$ ne sont pas coplanaires.
**2.** Déterminer la perpendiculaire commune à $D_1$ et $D_2$.
**3.** Déterminer l'ensemble des points équidistants de $D_1$ et $D_2$.

**Exercice IX.** Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on considère la droite

$$\mathcal{D}_t \ : \begin{cases} x-z=t \\ tx-2y+tz+1=0 \end{cases}$$

**1.** Donner un vecteur directeur de $\mathcal{D}_t$.

$n_1(1,0,-1)$ et $n_2(t,-2,t)$ sont des vecteurs normaux à $\mathcal{D}_t$, un vecteur directeur de $\mathcal{D}_t$ est donc $u_t=-n_1 \wedge n_2$ :$u(2,2t,2)$.

**2.** Montrer que pour tous $t \neq t'$, les droites $\mathcal{D}_t$ et $\mathcal{D}_{t'}$ ne sont pas coplanaires.

Deux droites sont coplanaires si, et seulement si, elles sont sécantes ou parallèles.
Un point $M(x,y,z)$ appartient à l'intersection de $\mathcal{D}_t$ et $\mathcal{D}_{t'}$ si, et seulement si, ses coordonnées vérifient simultanément les équations de $\mathcal{D}_t$ et $\mathcal{D}_{t'}$ et donc en particulier $x-z=t=t'$ ce qui est impossible si $t \neq t'$.
Le produit vectoriel des vecteurs directeurs $u_t$ et $u_{t'}$ des droites $\mathcal{D}_t$ et $\mathcal{D}_{t'}$ calculés à la question précédente est

$$u_t \wedge u_{t'} = \begin{pmatrix} 4(t-t') \\ 0 \\ 4(t'-t) \end{pmatrix}.$$

Ce produit vectoriel n'est pas nul si $t \neq t'$, les vecteurs $u_t$ et $u_{t'}$ ne sont donc pas colinéaires et les droites $\mathcal{D}_t$ et $\mathcal{D}_{t'}$ ne sont pas parallèles.
Nous avons ainsi montré que si $t \neq t'$ les droites $\mathcal{D}_t$ et $\mathcal{D}_{t'}$ ne sont pas coplanaires.

**3.** Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout point $M$ de $\mathcal{D}_t$ de coordonnées $(x,y,z)$ on a $x^2-z^2=2y-1$.

En remplaçant $t$ dans la deuxième équation de $\mathcal{D}_t$ par $x-z$ on obtient en effet $x^2-z^2=2y-1$.

**4.** Réciproquement, montrer que pour tout point $M(x,y,z)$ qui vérifie $x^2-z^2=2y-1$, il existe $t$ (que l'on calculera) tel que $M$ appartient à $\mathcal{D}_t$.

En posant $t=x-z$ on obtient bien que les coordonnées du point $M$ vérifient l'équation de $\mathcal{D}_t$.