Exercice I. On considère les droites du plan d'équation $D_1 :\ 3x - 2y + 1 = 0$ et $D_2 :\ 5x - 3y + 1 = 0$.

1. Ces droites sont-elles parallèles ? Sécantes ? Perpendiculaires ?

Un vecteur directeur de la droite D_1 est $\vec{u_1}(2, 3)$ et un vecteur directeur de D_2 est $\vec{u_2}(3, 5)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires : $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, les droites sont donc sécantes et ne sont pas parallèles. Les deux vecteurs ne sont pas orthogonaux : $\vec{u_1} \cdot \vec{u_2} = 21 \neq 0$, les droites ne sont donc pas perpendiculaires.

2. Déterminer l'intersection des droites D_1 et D_2.

Malheureusement le dessin ne nous permet pas de lire les coordonnées de l'intersection. Par le calcul ou la figure nous trouvons que l'intersection est le point $\Omega(1, 2)$.

3. Soit p la projection du plan sur la droite D_1 parallèlement à la droite D_2.

a. Déterminer l'image $A' = p(A)$ par p du point $A(2, 4)$.

À nouveau, le dessin ne nous permet pas de lire les coordonnées de A'.
Considérons les coordonnées $A'(x, y)$ du point $A' = p(A)$. Ces coordonnées vérifient l'équation de D_1 et de plus les vecteurs $\overrightarrow{AA'}(x - 2, y - 4)$ et $\vec{u_2}$ sont colinéaires. Nous résolvons donc le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x - 2y + 1 & = & 0 \\ 5(x-4) - 3(y-4) = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} 3x - 2y + 1 & = & 0 & \\ -y - 1 & = & 0 & (5L_1 - 3L_2) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -1 \\ y & = & -1 \end{array}\right.$$

Les coordonnées de $A' = p(A)$ sont donc $A'(-1, -1)$.

b. Déterminer tous les points M du plan tels que $p(M) = B$ où $B(3, 5)$.

Nous vérifions que le point B appartient bien à la droite D_1. Les antécédants de B par la projection p forment la droite D_3 parallèle à D_2 passant par B. Cette droite a pour équation $D_3 : 5x - 3y = 0$, elle passe par l'origine.

c. Pour un point $M(x, y)$ quelconque du plan, déterminer les coordonnées de $p(M)$.

Nous pouvons reprendre le raisonnement des questions précédentes en remplaçant les coordonnées du point A par celle de M. Les coordonnées $M'(x', y')$ du projeté $p(M)$ vérifient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x' - 2y' + 1 & = & 0 \\ 5(x'-x) - 3(y'-y) = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} 3x' - 2y' + 1 & = & 0 & \\ -y' + 5 + 15x - 9y & = & 0 & (5L_1 - 3L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x' & = & 10x - 6y + 3 \\ y' & = & 15x - 9y + 5 \end{array}\right. \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 15 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

d. Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de D_1 et $\vec{v}$ un vecteur directeur de D_2. Pour un point M de coordonnées (X, Y) par rapport au repère $(B, \vec{u}, \vec{v})$ déterminer les coordonnées de $p(M)$ par rapport à ce même repère.

Dans le nouveau repère, D_1 est l'axe des abscisses et D_2 est parallèle à l'axe des ordonnées. La projection p est donc la projection sur l'axe des abscisses parallèlement à l'axe des ordonnées. Les coordonnées de $p(M)$ sont donc $(X, 0)$.

Exercice II. Par rapport à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la transformation s du plan qui à un point $M(x, y)$ associe le point $s(M) = M'(2 - y; 2 - x)$.

1. Déterminer les points fixes de s.

Un point $M(x, y)$ est fixe par s, si $M = s(M)$ ce qui en coordonnées s'écrit

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2 - y \\ y & = & 2 - x \end{array}\right. \iff x + y = 2.$$

La droite D d'équation $x + y = 2$ est donc l'ensemble des points fixes de s.

2. Soit M un point du plan et $M' = s(M)$ son image par s. Démontrer que le milieu du segment $[MM']$ est fixe par s.

Le milieu $I(x_I, y_I)$ du segment $[MM']$ a pour coordonnées $(x_I, y_I) = (\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}) = (\frac{x+2-y}{2}, \frac{y+2-x}{2})$. Nous pouvons donc calculer $x_I + y_I = \frac{x+2-y}{2} + \frac{y+2-x}{2} = 2$. Le point I appartient bien à la droite des points fixes calculée à la question précédente.

3. Vérifier que s conserve les longueurs.

Soit $M(x, y)$ et $N(u, v)$ deux points du plan, et $M'(x', y') = s(M)$ et $N'(u', v') = s(N)$ leurs images avec leurs coordonnées. Nous pouvons alors calculer :

$$d(M', N')^2 = M'N'^2 = (u' - x')^2 + (v' - y')^2 = ((2 - v) - (2 - y))^2 + ((2 - u) - (2 - x))^2$$
$$= (y - v)^2 + (x - u)^2 = MN^2 = d(M, N)^2.$$

Nous avons ainsi démontré que s conserve les distances.

4. Conclure en donnant la nature de s.

s est une isométrie du plan qui possède une droite de points fixes et ce n'est pas l'identité. s est donc une symétrie par rapport à l'axe d'équation $x + y = 2$.

5. On considère la transformation s' du plan qui à un point $M(x, y)$ associe le point

$$s'(M) = M'(3 - y; 1 - x).$$

a. Cette transformation s' a-t-elle des points fixes ?

Comme précédemment nous résolvons :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3 - y \\ y & = & 1 - x \end{array}\right. \Rightarrow 0 = 3(L_1 - L_2).$$

La transformation s' n'a donc pas de points fixes.

b. Trouver une translation t telle que $s' = t \circ s$.

En observant les formes analytiques nous constatons que

$$s'(M) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - y \\ 1 - x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2 - y \\ -1 + 2 - x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - y \\ 2 - x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La transformation s' est donc la composée de la symétrie s et de la translation t de vecteur $\vec{w}(1, -1)$: $s' = t \circ s$.

c. Démontrer que la droite d'équation $x + y - 2 = 0$ est globalement invariante par s'.

Le vecteur $\vec{w}(1, -1)$ est un vecteur directeur de cette droite $D : x + y - 2 = 0$. Donc $t(D) = D$ (droite globalement invariante). De plus nous savons des questions précédentes que les points de la droite D sont fixes par la symétrie s. A fortiori, $s(D) = D$. Nous pouvons conclure : $s'(D) = t \circ s(D) = t(s(D)) = t(D) = D$: la droite D est globalement invariante par la transformation s'.

d. Quelle est la nature de s'.

La transformation s' est la composée d'une symétrie et d'une translation le long de l'axe de la symétrie : c'est une symétrie glissée.

Exercice III. **1.** Démontrer qu'une isométrie conserve les angles. De quels angles s'agit-il ici ?

Le théorème d'AL-KASHI permet d'écrire que quelques soient trois points deux à deux distincts du plan A, B et C, $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (AB^2 + AC^2 - BC^2)/(2\,AB\,AC)$. Autrement dit, le cosinus de l'angle $s(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ ne dépend que des longueurs AB, AC et BC. Une isométrie conserve les longueurs, elle conserve donc les cosinus des angles. Elle conserve donc les angles géométriques mesurés entre 0 et π. Attention, une isométrie indirecte (par exemple une symétrie axiale dans le plan) transforme un angle en son opposé.

2. Démontrer qu'une homothétie conserve les angles.

Une homothétie de rapport $\lambda \neq 0$, multiplie les longueurs par $|\lambda|$. La formule ci-dessus, donnée par le théorème d'AL-KASHI, permet donc de démontrer qu'une homothétie conserve les cosinus des angles et donc les angles géométriques mesurés entre 0 et π.
En dimension 2, une homothétie de rapport non-nul (j'insiste positif ou négatif) est une transformation directe, elle conserve les angles mesurés modulo 2π.

Exercice IV. On considère ABC un triangle non-plat, I, J et K les milieux des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$, G le centre de gravité, O le centre du cercle circonscrit et H l'orthocentre.
1. Soit h l'homothétie de centre G qui transforme I en A.
a. En utilisant les propriétés du barycentre partiel donner le rapport de h.

G est le barycentre du système de points pondérés $\{(A,1),(B,1),(C,1)\}$, en utilisant le baycentre partiel I de $\{(B,1),(C,1)\}$ nous en déduisons que G est le barycentre de $\{(A,1),(I,2)\}$. Nous avons donc l'égalité vectoriel $\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{IG}=\vec{0}$ ou encore $\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{GI}$. L'homothétie h a donc pour rapport -2.

b. Démontrer que h transforme la médiatrice de $[BC]$ en la hauteur issue de A.

La médiatrice D de $[BC]$ passe par I, une homothétie est une transformation affine donc elle conserve l'alignement, en particulier $h(D)$ passe par $h(I)=A$.
Une homothétie transforme une droite en une droite parallèle. La droite $h(D)$ est donc parallèle à la médiatrice de $[BC]$ en particulier elle est perpendiculaire à la droite (BC).
Nous avons ainsi démontré que la droite $h(D)$ est la perpendiculaire à la droite (BC) qui passe par A. C'est donc la hauteur issue de A.

2. Conclure que les points O, G et H sont alignés et préciser le rapport des longueurs entre ces trois points.

Nous pouvons répéter le raisonnement précédent en permutant les points : h transforme la médiatrice de $[AB]$ en la hauteur issue de C. L'homothétie h transforme donc le centre du cercle circonscrit O qui est à l'intersection des médiatrices de $[AB]$ et $[BC]$ en l'unique point H qui est à l'intersection des hauteurs issues de A et C : $h(O)=H$. (Au passage en utilisant le troisième côté, nous avons démontré que les trois hauteurs sont concourantes).
En reprenant la définition vectoriel de l'homothétie nous avons démontré que $\overrightarrow{GH}=-2\overrightarrow{GO}$: le centre de gravité est au tiers du segment $[OH]$ qui relie le centre du cercle circonscrit O et l'orthocentre H du triangle.

Exercice V. Dans le plan munit d'un repère orthonormé, on considère les points $A(1,0)$ et $B(-1,2)$. On considère l'homothétie h de centre A et de rapport 3 et l'homothétie h' de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$.
1. Déterminer $A' = h'(h(A))$.

Le point A est fixe par l'homothétie h de centre A. Écrivons la définition vectorielle de h' : $\overrightarrow{BA'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$, soit en coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x'+1 \\ y'-2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \iff A'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Soit Ω un point de la droite (AB) et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{A\Omega}=\alpha\overrightarrow{AB}$
a. Exprimer $\overrightarrow{Ah(\Omega)}$ puis $\overrightarrow{Ah'(h(\Omega))}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$

Soit $\Omega' = h(\Omega)$, alors $\overrightarrow{A\Omega'}=3\overrightarrow{A\Omega}=3\alpha\overrightarrow{AB}$. Soit $\Omega''=h'(\Omega')=h'(h(\Omega))$, alors

$$\overrightarrow{B\Omega''}=\frac{1}{2}\overrightarrow{B\Omega'}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{A\Omega'})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{A\Omega}).$$

Calculons encore

$$\overrightarrow{B\Omega''}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{A\Omega''}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{A\Omega}) \iff \overrightarrow{A\Omega''}=\frac{3}{2}\overrightarrow{A\Omega}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(3\alpha+1)\overrightarrow{AB}.$$

b. Décrire l'unique point fixe de $h' \circ h$.

Un point fixe Ω de $h' \circ h$ vérifie $\Omega = h'(h(\Omega)) = \Omega''$ et donc $\overrightarrow{A\Omega''} = \overrightarrow{A\Omega}$. En utilisant la question précédente nous en déduisons $\overrightarrow{A\Omega''} = \overrightarrow{A\Omega} = \alpha\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(3\alpha+1)\overrightarrow{AB}$ et comme les points A et B sont distincts nous déduisons $\alpha = \frac{1}{2}(3\alpha+1) \iff \alpha = -1$. L'unique point fixe de $h' \circ h$ est le point Ω tel que $\overrightarrow{A\Omega} = -\overrightarrow{AB}$: Ω est le symétrique de B par rapport à A. Il a pour coordonnées $\Omega(3, -2)$.

c. Conclure en donnant la nature de $h' \circ h$.

Nous constatons de plus que quelque soient deux points M et N, et leurs images $M' = h(M)$, $N' = h(N)$, $M'' = h'(M') = h' \circ h(M)$ et $N'' = h'(N') = h' \circ h(N)$, nous avons les égalités vectorielles :

$$\overrightarrow{M''N''} = \frac{1}{2}\overrightarrow{M'N'} = \frac{1}{2} \times 3\overrightarrow{MN}.$$

La transformation $h' \circ h$ mulitplie les vecteurs par $\frac{3}{2}$ et possède le point Ω comme point invariant. Donc la transformation $h' \circ h$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{3}{2}$.

Exercice VI. On considère deux droites D et D' du plan. En fonction de la position relative de D et D' décrire $s_{D'} \circ s_D$ où s_D et s'_D sont les sysmétries axiales par rapport à D et D' respectivement.

Exercice VII. L'espace et le plan sont rapportés à des repères orthonormés.
On considère le cube unité dans l'espace (c'est à dire le cube de côté 1, dont l'orgine est un sommet et dont les côtés sont parallèles aux axes du repère).
On considère l'application p qui à un point $M(x, y, z)$ de l'espace associe le point $M'(x + \frac{y}{2}, z + \frac{y}{3})$ du plan.
1. Calculer et dessiner l'image du cube unité.
2. Démontrer que l'application p conserve les milieux et l'alignement.
3. Déterminer tous les points de l'espace qui sont envoyés par p sur le point $N'(1, 0)$.

Exercice VIII. Soit D une droite du plan et F un point hors de D. On considère l'ensemble des points $\mathcal{P}$ équidistants de D et F.
1. Soit O le projeté orthogonal de F sur D, $\vec{i}$ un vecteur directeur unitaire de d et $\vec{j} = \frac{\overrightarrow{OF}}{OF}$.
a. Démontrer que $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé.
b. Pour un point M de coordonnées (x, y) par rapport à ce repère, calculer $d(M, D)$ et MF.
c. En posant $f = OF$, démontrer que $\mathcal{P}$ est la courbe d'équation $y = \frac{1}{2f}x^2 + \frac{f}{2}$.
2. Soit M un point de $\mathcal{P}$ et H le projeté orthogonal de M sur D.
a. Donner une équation de la médiatrice du segment $[FH]$.
b. Déterminer les intersections de cette médiatrice avec $\mathcal{P}$.
c. Conclure en décrivant la construction des tangentes à $\mathcal{P}$.
3. Démontrer qu'un rayon lumineux perpendiculaire à la directrice D se reflète sur la parabole en passant par F.