Exercice I. **1.** Dans le plan euclidien on se donne deux points distincts A et B. On considère la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et la rotation R' de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Déterminer la transformation du plan $R' \circ R$.

Nous considérons d'abord les parties linéaires qui se composent en une rotation linéaire d'angle $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$. Il nous reste à trouver le point fixe de cette rotation $R'' = R' \circ R$. Nous pouvons construire les points $R''(A) = R'(R(A)) = R'(A)$ et $R''(B) = R'(R(B))$. Le centre de la rotation R'' est l'intersection des médiatrices de $[AR''(A)]$ et de $[BR''(B)]$.

2. On considère maintenant la translation T de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Déterminer la transformation du plan $T \circ R$.

De même la partie vectorielle de $T \circ R$ est la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{2}$. Il nous reste à déterminer son centre. Comme précédemment nous plaçons $T(R(A)) = T(A) = B$ et $T(R(B)) = B''$. Le centre de la rotation $T \circ R$ est l'intersection des médiatrices de $[AB]$ et $[BB'']$.

Exercice II. **1.** Donner les symétries de l'image ci-contre.

Les quatre rotations centrées au centre du zélige et d'angles $\frac{2k\pi}{4}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2. Expliquer pourquoi aucune symétrie axiale ne laisse cette image invariante.

Nous remarquons que la rosace au centre de l'image ci-contre défini un sens de rotation : sur chaque lame on passe du noir au blanc en tournant dans le sens trigonométrique. Une isométrie de ce zélige doit conserver ce sens de rotation et donc est forcément une isométrie directe. Ceci exclu les symétries axiales qui sont indirectes.

Exercice III. Donner la forme affine de

1. la symétrie axiale par rapport à la droite d'équation $2x + y - 3 = 0$;

Soit $M(x, y)$ un point du plan et $M'(x', y')$ son image par la symétrie axiale. Alors le milieu I du segment $[MM']$ a pour coordonnées $(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2})$ et ces coordonnées vérifient l'équation de l'axe.

De plus le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ de coordonnées $(x' - x, y' - y)$ est orthogonal à la droite donc a un produit scalaire nul avec le vecteur $\vec{u}(-1, 2)$ directeur.

Nous avons donc le système d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\frac{x+x'}{2} + \frac{y+y'}{2} - 3 = 0 \\ -(x'-x) + 2(y'-y) = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccccc} 2x' & + & y' & = & 6 - 2x - y \\ x' & - & 2y' & = & x - 2y \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccl} 5x' & = & 12 - 3x - 4y \ (2L1 + L2) \\ 5y' & = & 6 - 4x + 3y \ (L1 - 2L2) \end{array} \right.$$

Soit sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

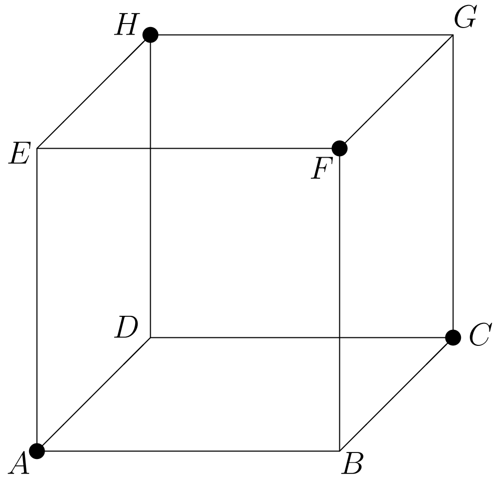
nous pouvons vérifier que la matrice est orthogonale, de déterminant 1.

2. la rotation de centre $A(1, 2)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

La rotation vectoriel d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme un vecteur $\vec{u}(x, y)$ en le vecteur $\vec{u'}(-y, x)$. L'image d'un point $M(x, y)$ par la rotation affine est donc le point $M'(x', y')$ tel que le vecteur $\overrightarrow{AM}(x-1, y-2)$ est transformé par la rotation vectorielle en le vecteur $\overrightarrow{AM'}(x'-1, y'-2)$. Nous avons donc les équations

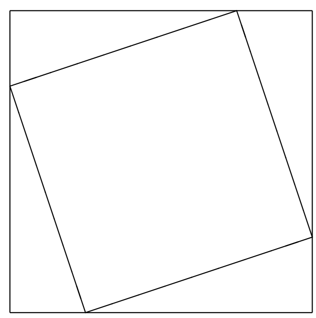
$$\begin{cases} x'-1 = -(y-2) \\ y'-2 = x-1 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

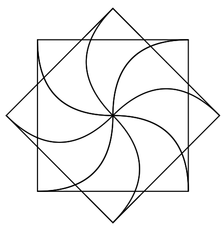
où l'on reconnait la matrice de la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{2}$.



Exercice IV. On considère un cube $ABCDEFGH$.
1. Décrire l'isométrie du cube qui fixe A et fait tourner les sommets : $B \mapsto D \mapsto E \mapsto B$. *Vous donnerez à la fois une description géométrique de cette isométrie et la permutation complète des sommets qu'elle réalise.*
2. On colorie les sommets $ACFH$ en rouge (ils ont un gros point noir sur le dessin) et les autres sommets en vert. Donner les isométries directes du cube qui respectent les couleurs.

Exercice V. **1.** Donner la liste des six isométries d'un triangle équilatéral.
2. Donner la liste des huit isométries d'un carré.
3. Donner la liste des quatre isométries du dessin ci-contre
4. Montrer qu'il y a une bijection entre le groupe symétrique S_4 et le groupe des isométries d'un tétraèdre régulier.
5. Donner un dessin du plan qui a exactement trois symétries.





6. Donner les huit symétries du dessin ci-contre et montrer que ce ne sont pas les mêmes symétries que celles du carré.
7. Donner deux dessins du plan qui ont exactement dix symétries mais dont les groupes de symétries sont différents.

Exercice VI. Dessiner toutes les isométries des images au verso en provenance de la Médina de Tunis (Tunisie).

Exercice VII. **1.** **a.** Dans un tétraèdre régulier $ABCD$ on colorie les arêts $[AB]$ et $[CD]$ en rouge, les arêtes $[AC]$ et $[BD]$ en vert et les arêtes $[AD]$ et $[BC]$ en bleu. Donner les symétries de ce tétraèdre coloré.

b. Décrire comment la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et d'axe (OA) (orienté par $\overrightarrow{OA}$) permute les couleurs (où O est le centre du tétraèdre).

c. Décrire comment la symétrie orthogonale par rapport au plan (ABI) permute les couleurs (où I est le milieu de de $[CD]$).

2. Montrer qu'il y a exactement deux manières de former un tétraèdre régulier avec les sommets d'un cube (vous ferez un beau dessin avec des couleurs).

3. Dans un cube $ABCDEFGH$, on colorie les sommets $ACFH$ en rouge et les autres sommets en vert. Donner les symétries directes du cube qui respectent les couleurs.