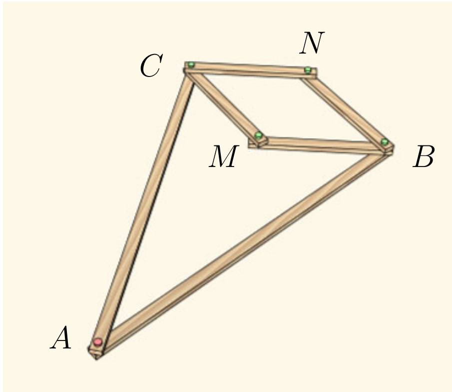
Faculté des sciences
Université d'Aix*Marseille

Devoir à la maison
à rendre le 30 janvier 2019

☐ Aix-Montperrin
☐ Luminy
☐ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert
☒ Espe

Préparation au Capes de mathématiques, master Meef, 1re année
Enseignant : T. Coulbois



I. L'inverseur de Peaucellier. L'instrument inventé par Charles Nicolas Peaucellier (1832-1913) transforme un mouvement rectiligne (le piston de la machine à vapeur par exemple) en un mouvement circulaire (les roues de la locomotive).
L'instrument est composé d'un point A fixe et de six tiges : les deux premières AB et AC de longueur R, les quatre autres BM, CM, BN et CN de longueur $r < R$.

1. Démontrer que les points A, M et N sont alignés.
2. Soit I le milieu commun de $[BC]$ et $[MN]$.
a. Démontrer que $\overline{AM}.\overline{AN} = AI^2 - IM^2$.
b. En déduire que $\overline{AM}.\overline{AN} = R^2 - r^2$.
3. Démontrer que si M appartient au cercle de centre A et de rayon $p = \sqrt{R^2 - r^2}$ alors M et N sont confondus.

II. Inversion par rapport à un cercle. Soit A un point du plan et $\mathcal{C}$ un cercle de centre A et de rayon p. L'inversion i par rapport au cercle $\mathcal{C}$ transforme un point M distinct de A en l'unique point $N = i(M)$ de la droite (AM) tel que $\overline{AM}.\overline{AN} = p^2$.
1. Étant donné le cercle $\mathcal{C}$ proposer une construction géométrique (c'est-à-dire à la règle et au compas) de l'inverse $N = i(M)$ en fonction du point M. Vous pourrez vous inspirer de l'instrument de Peaucellier.
2. Soit M et M' deux points du plan et $N = i(M)$ et $N' = i(M')$ leurs inverses par rapport au cercle $\mathcal{C}$.
a. Démontrer que les triangles AMN' et $AM'N$ sont semblables.
b. Démontrer que les angles $\widehat{ANM'}$ et $\widehat{MN'A}$ sont égaux.
c. En déduire que les points M, N, M' et N' sont cocycliques.
3. Soit $\mathcal{C}'$ un cercle passant par A et de diamètre $[AK]$. Soit D l'inverse de K par rapport à $\mathcal{C}$.
a. Pour tout point M du cercle $\mathcal{C}'$ d'inverse $N = i(M)$, démontrer que le triangle ADN est rectangle en D.
b. En déduire que l'image du cercle $\mathcal{C}'$ par l'inversion par rapport au cercle $\mathcal{C}$ est la droite perpendiculaire à (AC) passant par D.

III. Retour à l'inverseur de Peaucellier.
1. À l'aide des questions I et II démontrer que si le point M de l'instrument de Peaucellier parcours un cercle passant par A, alors le point N parcours une droite que l'on précisera.
2. On s'intéresse maintenant aux limites de l'instrument de Peaucellier.
a. Montrer que le point M est toujours tel que $R - r \leq AM \leq R + r$.
b. Réciproquement démontrer que le point M de l'instrument peut être placé en tout point du plan dont la distance au point fixe A est comprise entre $R - r$ et $R + r$.
c. On suppose que l'instrument est construit avec $AB = AC = 60\,\text{cm}$, et $BM = BN = CM = CN = 20\,\text{cm}$. On fait varier le point M sur un cercle $\mathcal{C}'$ passant par A et de rayon $25\,\text{cm}$. Préciser l'arc de cercle que peut décrire M ainsi que le segment que parcourt N.

IV. Forme complexe d'une inversion. On considère la fonction $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{2\bar{z}-3}{\bar{z}-2} \end{array}$.

1. a. Démontrer que $\varphi(z) = z \iff (z-2)(\bar{z}-2) - 1 = 0$.
b. Démontrer que l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe est invariante par φ est un cercle dont vous préciserez le centre et le rayon.
2. On considère de plus le point Ω d'affixe $z_\Omega = 2$. Soit M un point d'affixe z différent de Ω et N d'affixe $\varphi(z)$. Démontrer que Ω, M et N sont alignés et que $\overline{\Omega M}.\overline{\Omega N} = 1$.
3. En déduire que φ est la forme complexe d'une inversion.
4. Réciproquement on considère l'inversion i par rapport au cercle unité. Pour un point M différent de l'origine O et d'affixe z, déterminer l'affixe $\psi(z)$ de $N = i(M)$ l'image de M par l'inversion.
5. Démontrer que pour tout $z \neq \frac{-1}{2}$, $\varphi \circ \psi(z) = \frac{3z-2}{2z-1}$.
6. Déterminer le(s) point(s) fixe(s) de cette transformation $z \mapsto \varphi(\psi(z))$.