Faculté des sciences
Université d'Aix-Marseille

Devoir à la maison
à rendre le 8 février 2019

☐ Aix-Montperrin
☐ Luminy
☐ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert
☒ Espe

Préparation au Capes de mathématiques, master Meef, 1re année
Thierry Coulbois

Le modèle de Poincaré du plan hyperbolique

Soit H le demi-plan ouvert supérieur : $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

Une homographie est une transformation de $\mathbb{C}$ définie par $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ où a, b, c, d sont des nombres complexes et $ad - bc \neq 0$. Attention : une homographie n'est pas nécessairement définie dans tout le plan complexe. La matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est associée à l'homographie.

1. Démontrer qu'une homographie est injective sur $\mathbb{C}$.
2. Démontrer que la matrice associée à la composée de deux homographies est le produit des deux matrices associées.

On suppose désormais que a, b, c, d sont des nombres réels que que $ad - bc > 0$.

3. Démontrer que l'homographie définie une bijection de H dans H.

Les transformations de la forme $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ où a, b, c, d sont des nombres réels et $ad - bc > 0$ sont les **isométries directes** du demi-plan de Poincaré.

4. Démontrer que pour tout nombre complexe z_0 de H il existe une isométrie directe (c'est-à-dire une homographie avec a, b, c, d réels et $ad - bc > 0$) qui envoie z_0 sur i.
5. Déterminer toutes les isométries directes de H qui laissent i invariant.
6. Démontrer que pour tous nombres complexes z_0, z_1 de H il existe une isométrie directe qui envoie z_0 sur i et z_1 sur $\delta + i$ où δ est un nombre réel strictement positif.
7. Démontrer que δ est uniquement déterminé par z_0 et z_1.

Le nombre δ est la **distance hyperbolique** entre z_0 et z_1.

Une **droite** de H est soit un demi-cercle ouvert centré sur l'axe réel et inclus dans H, soit une demi-droite ouverte verticale partant de l'axe réel. On note $\mathcal{D}(H)$ l'ensemble des droites de H.

8. Soit A, B, C les points d'affixes i, $i+1$, $2i$. Tracer les droites de H passant par A et B, par A et C, par B et C.
9. Démontrer que par deux points il passe une et une seule droite de H.
10. Tracer la droite de H passant par $i+3$ et $2i+6$. Remarquez que cette droite est disjointe (donc "parallèle") des droites (AB) et (AC).

Si on prend pour définition que deux droites sont parallèles si elles sont disjointes ou confondues alors le 5e postulat d'Euclide est faux dans le plan hyperbolique.

11. Démontrer qu'une isométrie directe de H transforme une droite de H en une droite de H (vous pourrez d'abord le faire pour les cas particuliers : $z \mapsto z + c$, $z \mapsto az$ et $z \mapsto \frac{-1}{z}$. Puis vous démontrerez que toute isométrie directe peut s'écrire comme la composée d'isométries directes des trois types précédents).

L'**angle** entre deux droites de H sécantes est l'angle formé par leurs tangentes au point d'intersection.

12. Démontrer que toutes les droites perpendiculaire à la droite (AC) sont parallèles entre elles.
13. Démontrer que deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles.
14. Étant donné un point et une droite de H construire la perpendiculaire à cette droite passant par ce point (vous distinguerez les différents cas).