

**Exercice I.** On considère les droites du plan d'équation  $D_1 : 3x - 2y + 1 = 0$  et  $D_2 : 5x - 3y + 1 = 0$ .

1. Ces droites sont-elles parallèles ? Sécantes ? Perpendiculaires ?
2. Déterminer l'intersection des droites  $D_1$  et  $D_2$ .
3. Soit  $p$  la projection du plan sur la droite  $D_1$  parallèlement à la droite  $D_2$ .
  - a. Tracer l'image du carré unité (c'est-à-dire de sommets  $O(0,0)$ ,  $C_1(1,0)$ ,  $C_2(1,1)$  et  $C_3(0,1)$ ).
  - b. Déterminer l'image  $A' = p(A)$  par  $p$  du point  $A(2,4)$ .
  - c. Déterminer tous les points  $M$  du plan tels que  $p(M) = B$  où  $B(3,5)$ .
  - d. Pour un point  $M(x,y)$  quelconque du plan, déterminer les coordonnées de  $p(M)$ .
  - e. Soit  $\vec{u}$  un vecteur directeur de  $D_1$  et  $\vec{v}$  un vecteur directeur de  $D_2$ . Pour un point  $M$  de coordonnées  $(X,Y)$  par rapport au repère  $(B, \vec{u}, \vec{v})$  déterminer les coordonnées de  $p(M)$  par rapport à ce même repère.

**Exercice II.** Par rapport à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on considère la transformation  $s$  du plan qui à un point  $M(x,y)$  associe le point  $s(M) = M'(2-y; 2-x)$ .

1. Déterminer les points fixes de  $s$ .
2. Soit  $M$  un point du plan et  $M' = s(M)$  son image par  $s$ . Démontrer que le milieu du segment  $[MM']$  est fixe par  $s$ .
3. Vérifier que  $s$  conserve les longueurs.
4. Conclure en donnant la nature de  $s$ .
5. On considère la transformation  $s'$  du plan qui à un point  $M(x,y)$  associe le point

$$s'(M) = M'(3-y; 1-x).$$

- a. Cette transformation  $s'$  a-t-elle des points fixes ?
- b. Trouver une translation  $t$  telle que  $s' = t \circ s$ .
- c. Démontrer que la droite d'équation  $x + y - 2 = 0$  est globalement invariante par  $s'$ .
- d. Quelle est la nature de  $s'$ .

**Exercice III.** 1. Démontrer qu'une isométrie conserve les angles. De quels angles s'agit-il ici ?

2. Démontrer qu'une homothétie conserve les angles.

**Exercice IV.** On considère  $ABC$  un triangle non-plat,  $I, J$  et  $K$  les milieux des segments  $[BC]$ ,  $[AC]$  et  $[AB]$ ,  $G$  le centre de gravité,  $O$  le centre du cercle circonscrit et  $H$  l'orthocentre.

1. Soit  $h$  l'homothétie de centre  $G$  qui transforme  $A$  en  $I$ .
  - a. En utilisant les propriétés du barycentre partiel donner le rapport de  $h$ .
  - b. Démontrer que  $h$  transforme la médiatrice de  $[BC]$  en la hauteur issue de  $A$ .
2. Conclure que les points  $O, G$  et  $H$  sont alignés et préciser le rapport des longueurs entre ces trois points.

**Exercice V.** Dans le plan munit d'un repère orthonormé, on considère les points  $A(1,0)$  et  $B(-1,2)$ . On considère l'homothétie  $h$  de centre  $A$  et de rapport 3 et l'homothétie  $h'$  de centre  $B$  et de rapport  $\frac{1}{2}$ .

1. Déterminer  $A' = h'(h(A))$ .
2. Soit  $\Omega$  un point de la droite  $(AB)$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $\overrightarrow{A\Omega} = \alpha \overrightarrow{AB}$ 
  - a. Exprimer  $\overrightarrow{Ah(\Omega)}$  puis  $\overrightarrow{Ah'(h(\Omega))}$  en fonction de  $\overrightarrow{AB}$
  - b. Décrire l'unique point fixe de  $h' \circ h$ .
  - c. Conclure en donnant la nature de  $h' \circ h$ .

**Exercice VI.** On considère deux droites  $D$  et  $D'$  du plan. En fonction de la position relative de  $D$  et  $D'$  décrire  $s_{D'} \circ s_D$  où  $s_D$  et  $s_{D'}$  sont les symétries axiales par rapport à  $D$  et  $D'$  respectivement.

**Exercice VII.** L'espace et le plan sont rapportés à des repères orthonormés.

On considère le cube unité dans l'espace (c'est à dire le cube de côté 1, dont l'origine est un sommet et dont les côtés sont parallèles aux axes du repère).

On considère l'application  $p$  qui à un point  $M(x, y, z)$  de l'espace associe le point  $M'(x + \frac{y}{2}, z + \frac{y}{3})$  du plan.

1. Calculer et dessiner l'image du cube unité.
2. Démontrer que l'application  $p$  conserve les milieux et l'alignement.
3. Déterminer tous les points de l'espace qui sont envoyés par  $p$  sur le point  $N'(1, 0)$ .

**Exercice VIII.** Soit  $D$  une droite du plan et  $F$  un point hors de  $D$ . On considère l'ensemble des points  $\mathcal{P}$  équidistants de  $D$  et  $F$ .

1. Soit  $O$  le projeté orthogonal de  $F$  sur  $D$ ,  $\vec{i}$  un vecteur directeur unitaire de  $d$  et  $\vec{j} = \frac{\overrightarrow{OF}}{OF}$ .
  - a. Démontrer que  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est un repère orthonormé.
  - b. Pour un point  $M$  de coordonnées  $(x, y)$  par rapport à ce repère, calculer  $d(M, D)$  et  $MF$ .
  - c. En posant  $f = OF$ , démontrer que  $\mathcal{P}$  est la courbe d'équation  $y = \frac{1}{2f}x^2 + \frac{f}{2}$ .
2. Soit  $M$  un point de  $\mathcal{P}$  et  $H$  le projeté orthogonal de  $M$  sur  $D$ .
  - a. Donner une équation de la médiatrice du segment  $[FH]$ .
  - b. Déterminer les intersections de cette médiatrice avec  $\mathcal{P}$ .
  - c. Conclure en décrivant la construction des tangentes à  $\mathcal{P}$ .
3. Démontrer qu'un rayon lumineux perpendiculaire à la directrice  $D$  se reflète sur la parabole en passant par  $F$ .