

Problème 1 : matrices d'ordre fini.

Notations et définitions.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$) l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes dont les coefficients appartiennent à $\mathbb{C}$ (respectivement à $\mathbb{R}$, à $\mathbb{Z}$).

La matrice identité de taille n est notée I_n .

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. L'ensemble des valeurs propres de A est appelé spectre de A et noté $Sp(A)$.

On dit que A est **d'ordre fini** s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$, tel que $A^k = I_n$.

Si A est d'ordre fini, le plus petit entier strictement positif k tel que $A^k = I_n$ est appelé **ordre** de A et noté $o(A)$.

Partie A : préliminaires

1. Cette question consiste en des rappels de théorèmes du cours.
 - 1.1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X], P \neq 0$ tel que $P(A) = 0$.
 - i. Donner une condition suffisante sur P pour que A soit trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - ii. Donner une condition suffisante sur P pour que A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - 1.2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X], P \neq 0$ tel que $P(A) = 0$.
Que deviennent les conditions précédentes lorsque l'on s'intéresse à la trigonalisation ou à la diagonalisation de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?
2. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, d'ordre fini. On pose $o(B) = b$.
 - 2.1. Démontrer que B est inversible.
 - 2.2. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Démontrer que $B^k = I_n$ si et seulement si b divise k .
 - 2.3. Démontrer que les valeurs propres de B sont des racines b -ièmes de l'unité.
 - 2.4. Démontrer que B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
3. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Ses valeurs propres sont notées $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
On suppose que C est diagonalisable et que pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, λ_i est une racine n_i -ième de l'unité pour un certain entier n_i .
Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, on note k_i le plus petit entier strictement positif tel que $\lambda_i^{k_i} = 1$.
 - 3.1. Démontrer que C est d'ordre fini et que son ordre divise le PPCM de $k_1, \dots, k_n$.
 - 3.2. Démontrer que $o(C)$ est le PPCM de $k_1, \dots, k_n$.

Partie B : matrices d'ordre fini à coefficients réels

Dans cette partie, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ d'ordre fini. Le but est de démontrer que cette matrice est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et de déterminer le spectre de A dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrer que si toutes les valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$ sont réelles, alors $Sp(A) \subseteq \{-1, 1\}$.
2. On suppose que 1 est la seule valeur propre de A dans $\mathbb{C}$.
 - 2.1. Justifier qu'il existe $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible, et a, b, c éléments de $\mathbb{R}$ tels que :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 2.2. On pose $B = P^{-1}AP$. Démontrer que B est d'ordre fini.

- 2.3. Démontrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $B^k = \begin{pmatrix} 1 & ka & \frac{k(k-1)}{2}ac + kb \\ 0 & 1 & kc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

2.4. En déduire que $A = I_3$.

3. Énoncer sans démonstration un résultat semblable lorsque -1 est la seule valeur propre de A dans $\mathbb{C}$.
4. On suppose que -1 est valeur propre simple de A et que 1 est valeur propre double de A .
 - 4.1. Justifier qu'il existe $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible, et a, b, c éléments de $\mathbb{R}$ tels que :

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.2. On pose $C = Q^{-1}AQ$.

Démontrer qu'il existe trois suites de nombres réels $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telles que pour tout entier naturel k :

$$C^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & \alpha_k & \beta_k \\ 0 & 1 & \gamma_k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On définira ces suites à l'aide de relations de récurrence.

- 4.3. Donner une expression de γ_k pour tout $k \geq 0$.
- 4.4. En déduire que $c = 0$.
- 4.5. En déduire que C et A sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
5. Énoncer sans démonstration un résultat semblable lorsque -1 est valeur propre double de A et 1 est valeur propre simple de A .
6. On suppose que A admet dans $\mathbb{C}$ au moins une valeur propre non réelle.
 - 6.1. Démontrer qu'il existe $\theta \in 2\pi\mathbb{Q} \setminus \pi\mathbb{Z}$, tel que $Sp(A) = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, 1\}$ ou $\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, -1\}$.
On pourra considérer le polynôme caractéristique de A .
 - 6.2. Démontrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
7. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que A est d'ordre fini si, et seulement si, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et qu'il existe $\theta \in 2\pi\mathbb{Q}$ tel que $Sp(A) = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, 1\}$ ou $\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, -1\}$.

Partie C : matrices d'ordre fini à coefficients entiers

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$, d'ordre fini. D'après la partie B, son spectre dans $\mathbb{C}$ est de la forme $Sp(A) = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, 1\}$ ou $\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, -1\}$, où $\theta \in 2\pi\mathbb{Q}$.

1. Démontrer que $2 \cos \theta \in \mathbb{Z}$.
On pourra considérer la trace de A .
2. Donner les valeurs possibles pour θ .
3. Donner les différents spectres dans $\mathbb{C}$ possibles pour A puis démontrer que $o(A) \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$.
4. On cherche maintenant à construire des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ de chaque ordre.
 - 4.1. Donner des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ d'ordre 1 et 2.
 - 4.2.
 - i. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. Calculer le polynôme caractéristique de : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & -c \end{pmatrix}$.
 - ii. Construire une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ dont les valeurs propres sont $1, e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.
Démontrer que cette matrice est d'ordre 3.
 - iii. Construire des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ d'ordre 4 et d'ordre 6.