Faculté des sciences
Université d'Aix-Marseille

Devoir surveillé
jeudi 12 mars 2020

☐ Aix-Montperrin
☐ Luminy
☐ Saint-Charles
☒ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Préparation au Capes de mathématiques, master Meef, 1re année
Géométrie

Cinq heures, ni calculatrices ni documents

Enseignants : T. Coulbois, R. Zarouf

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants. Vous rendrez les deux problèmes sur deux copies séparées.

Problème d'Analyse

Tout au long de ce problème la fonction φ est définie par :

$$\varphi(t) = \frac{\sin(t)}{t},$$

pour tout $t > 0$.

1 Préliminaires

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction à valeurs réelles, continue sur $I = [x_0, +\infty[$. Donnez une définition (n'ayant recours qu'à des outils et notions de Terminale Scientifique) de l'assertion "f est intégrable sur I".
2. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels. Donnez une définition (n'ayant recours qu'à des outils et notions de Terminale Scientifique) de l'assertion "la série numérique de terme général u_n est convergente".
3. Démontrez que la série numérique de terme général $\frac{1}{n}$ est divergente en ayant uniquement recours à des outils et notions de Terminale Scientifique.
4. Démontrez la double inégalité : $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}],\ \frac{2}{\pi}t \leq \sin(t) \leq t$.
5. Vérifiez que φ est prolongeable par continuité sur l'intervalle $[0, 1]$.
6. Sur quelle propriété de la fonction φ, au programme des classes de Terminales Scientifiques, repose le fait que cette fonction est bien prolongeable par continuité sur l'intervalle $[0, 1]$? Démontrez cette propriété comme si vous aviez à le présenter devant une classe de Terminale Scientifique.
7. φ est-elle intégrable sur $[0, 1]$? Justifiez votre réponse.
8. Pour tout $t > 0$, on pose $f(t) = \sqrt{t+1} - \sqrt{t}$.
   (a) Précisez la forme indeterminée que présente le calcul de $\lim_{t\to+\infty} f(t)$, puis émettre une conjecture quant à la valeur de cette limite.
   (b) En mettant $\sqrt{t}$ en facteur dans l'expression qui définit $f(t)$, puis en vous inspirant de la preuve que vous aurez donnée à la question 6, montrez que $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ existe et calculez sa valeur.
   (c) Par une méthode différente de celle mise en oeuvre en 8-(b), mais qui reste accessible à un élève de Terminale Scientifique, montrez que $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ existe et calculez sa valeur.

2 Existence de $\int_0^{+\infty} \varphi(t)\, \mathrm{d}t$

Le but de cette partie est de démontrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t)\, \mathrm{d}t$$

est convergente.

1. Pour tout $x > 1$, on définit $\phi\ :\ x \mapsto \phi(x) = \int_1^x \varphi(t)\, \mathrm{d}t$.
   Montrer que l'on a $: \forall x > 1,\ \phi(x) = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t$.
2. Prouver que la limite de $\phi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ existe et est finie.
3. Conclure.

3 Etude de l'intégrabilité de $|\varphi|$ sur $I = [0, +\infty)$

1. Montrez que
$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\varphi(t)| \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{k\pi + t} \mathrm{d}t.$$
2. En déduire que pour tout entier $k \geq 0$,
$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\varphi(t)| \mathrm{d}t \geq \frac{2}{(k+1)\pi}.$$
3. En utilisant la question précedente, ainsi que les questions 1.1 et 1.3, conclure quant à l'intégrabilité de $|\varphi|$ sur $I = [0, +\infty)$.

Problème de géométrie

Sujet adapté de la 2e épreuve écrite du CAPES *externe de 2011.*

Ce problème à pour objet de démontrer l'existence et l'unicité d'une ellipse d'aire minimale circonscrite à un triangle équilatéral.
On se place dans le plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$.
Le terme ellipse désigne une courbe bornée admettant dans un repère une équation du type $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ avec $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^6$ tel que $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.

Questions préliminaires.

1. a. Écrire pour des élèves de 6e un programme de construction de la médiatrice d'un segment $[AB]$.

Pour deux points A et B distincts :

1. Tracez le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre A passant par B.
2. Tracez le cercle $\mathcal{C}_2$ de centre B passant par A.
3. Soit P et Q les deux points d'intersection des cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
4. Tracez la droite (PQ) qui est la médiatrice de $[AB]$.

Remarques (pour les élèves) : On peut choisir un autre rayon pour les deux cercles, du moment qu'il est assez grand et que c'est le même rayon pour le cercle $\mathcal{C}_1$ et le cercle $\mathcal{C}_2$. Il n'est pas nécessaire de tracer les cercles en entier : des arcs de cercles « au-dessus et en-dessous » du segment sont suffisants pour trouver les points d'intersection.
Remarques : le langage proposé aux élèves est ici technique et spécifiquement mathématique. Il faudra préciser, à l'oral, comment tracer un cercle avec le compas.
On peut aussi tracer la médiatrice en plaçant le milieu du segment [AB] en mesurant avec la règle puis en utlisant l'équerre. J'ai accepté les deux constructions dans la correction de vos copies. J'ai aussi accepté plusieurs niveau de langages (mention de la pointe du compas etc.)

b. La médiatrice est d'abord définie au collège comme la perpendiculaire passant par le milieu d'un segment. Proposer une démonstration accessible aux élèves de 4e de la propriété d'équidistance de la médiatrice.

Soit I le milieu du segment $[AB]$ et $\mathcal{D}$ la médiatrice de $[AB]$. Soit M un point de $\mathcal{D}$. Comme la droite $\mathcal{D}$ est perpendiculaire à la droite (AB) et que M et I sont des points de la médiatrices $\mathcal{D}$, les triangles AIM et BIM sont rectangles en I. Le théorème de PYTHAGORE nous permet alors d'écrire que $AM^2 = AI^2 + IM^2$ et $BM^2 = BI^2 + IM^2$. Comme I est le milieu du segment $[AB]$, il le partage en deux moitiés égales : $AI = BI = \frac{1}{2}AB$. En remplaçant dans les égalités nous déduisons : $AM^2 = AI^2 + IM^2 = BI^2 + IM^2 = BM^2$ et donc $AM = BM$.
Nous avons démontré que tout point M de la médiatrice $\mathcal{D}$ est équidistant des deux points A et B.
Votre réponse doit être une démonstration. Elle doit contenir une phrase de conclusion.

c. Justifier la construction à la règle et au compas de la médiatrice d'un segment grâce à sa propriété d'équidistance.

Nous avons présenté à la première question la construction à la règle et au compas. Les points P et Q sont sur le cercle $\mathcal{C}_1$, donc les distances AP et AQ sont des rayons de ce cercle (notre choix pour ce rayon était $R = AB$). Les points P et Q sont aussi sur le cercle $\mathcal{C}_2$ qui a le même rayon R que $\mathcal{C}_1$, donc $BP = BQ = R$. De ces égalités nous déduisons que $AP = BP$ et $AQ = BQ$. Les points P et Q sont donc équidistants des deux points A et B. Les points P et Q sont donc des points de la médiatrice $\mathcal{D}$ du segment $[AB]$. Comme deux points distincts déterminent une droite, nous avons démontré que la droite (PQ) que nous avons tracée est bien égale à la médiatrice $\mathcal{D}$ du segment $[AB]$.
Notez que j'insiste lourdement sur le type des objets que je manipule : point, droite, segment.

2. Une figure géométrique (ici une ellipse) est centrée au point O si elle est invariante par la symétrie centrale de centre O.

a. Définir la symétrie centrale de centre O.

La symétrie centrale de centre O est la transformation du plan affine qui à tout point M associe le point M' tel que O est le milieu de $[MM']$ (alternativement, à vous de choisir, $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$).

b. Par rapport à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ donner la forme analytique (c'est-à-dire l'expression en coordonnées) de la symétrie centrale de centre O.

Soit $M(x,y)$ un point du plan et ses coordonnées par rapport au repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ et $M'(x',y')$ son image par la symétrie de centre O avec ses coordonnées. Alors $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$.

c. Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de centre O et d'équation $ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. Montrer que $d=e=0$.

Pour tout point M de l'ellipse $\mathcal{E}$ de coordonnées (x,y) son symétrique M' par rapport à O de coordonnées $(-x,-y)$ (d'après la question précédente) appartient aussi à $\mathcal{E}$. Donc $ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$ et $a(-x)^2+b(-y)^2+c(-x)(-y)+d(-x)+e(-y)+f=0$. Un rapide calcul en soustrayant ces deux égalités nous permet de déduire que $dx+ey=0$ et ce pout tout point $M(x,y)$ de $\mathcal{E}$.
Si $(d,e)\neq(0,0)$, $dx+ey=0$ est l'équation d'une droite. Donc si l'ellipse $\mathcal{E}$ n'est pas incluse dans une droite alors nécessairement $d=e=0$.
L'énoncé précise qu'une ellipse est une courbe bornée, cela semble exclure la possibilité qu'elle soit incluse dans une droite.
Nous avons donc démontré que si $\mathcal{E}$ est une ellipse centrée en O et d'équation $ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$ alors $d=e=0$.
Remarque : Nous pouvons pousser plus loin le raisonnement pour démontrer que si une ellipse est incluse dans une droite alors elle est vide ou réduite à un point et même dans ces cas, $e=f=0$.

Exemple d'un triangle équilatéral.

3. Étant donné un repère orthonormal direct $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points :

$$I(1,0),\ J(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}) \text{ et } K(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}).$$

Démontrer que le cercle circonscrit à IJK est l'unique ellipse de centre O contenant les points I, J et K.

Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de centre O et passant par I, J et K. D'après la question précédente son équation est de la forme $ax^2+by^2+cxy+f=0$ avec a,b,c,f quatre nombres réels et $(a,b,c)\neq(0,0,0)$. Les coordonnées des points I, J et K vérifient l'équation de $\mathcal{E}$. Nous obtenons un système linéaire de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} a+f=0 \\ a\frac{1}{4}+b\frac{3}{4}-c\frac{\sqrt{3}}{4}+f=0 \\ a\frac{1}{4}+b\frac{3}{4}+c\frac{\sqrt{3}}{4}+f=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-f \\ 2c\frac{\sqrt{3}}{4}=0 \quad (L3-L2) \\ \frac{1}{2}a+\frac{3}{2}b+2f=0 \ (L2+L3) \end{cases} \qquad \begin{cases} c=0 \\ a=b=-f \end{cases}$$

L'équation de $\mathcal{E}$ est donc de la forme $a(x^2+y^2-1)=0$ et comme $c=0$, $b=a$ et $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ nous avons $a\neq0$. Finalement une équation de $\mathcal{E}$ est $x^2+y^2=1$. Nous reconnaissons l'équation du cercle unité qui passe bien par les trois points.
Nous avons donc démontré qu'il existe une unique ellipse centré en O qui passe par I, J et K : le cercle unité.

4. Soit ABC un triangle équilatéral et R le rayon de son cercle circonscrit. Exprimer l'aire du triangle ABC en fonction de R.

Désolé, ce corrigé ne contient pas de figures (trop compliqué à faire en LaTeX).
Dans un triangle équilatéral, hauteurs, médianes et médiatrices coïncident et donc le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre sont égaux. Soit O le centre de ce triangle. Alors comme O est le centre de gravité, il est situé au 2/3 des médianes : $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ où I est le milieu du côté $[BC]$.
Les angles d'un triangle équilatéral sont $\pi/3$ donc dans le triangle AIB rectangle en I (car le milieu I de $[BC]$ est aussi le pied de la hauteur issue de A) donc $AI=BA\cos(\pi/3)=AB\sqrt{3}/2$.
Finalement l'aire d'un triangle est la moitié de la base fois la hauteur :

$$\mathcal{A}_{ABC}=\frac{1}{2}AI\times BC=\frac{1}{2}AB\times\frac{\sqrt{3}}{2}BC=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \text{ où } a=AB=BC \text{ est la longueur du côté du triangle.}$$

En revenant à la première équation, le rayon R du cercle circonscrit est $R=AO=\frac{2}{3}AI=\frac{2}{3}BA\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}AB$.
Nous concluons que l'aire du triangle en fonction du rayon est

$$\mathcal{A}_{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3R}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2.$$

Exemple d'un cercle.

5. Résoudre le système d'équations $\begin{cases} \cos(y-x)=\cos x \\ \cos(y-x)=\cos y \end{cases}$ d'inconnue $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ telle que $0<x<y<2\pi$.

Cette question est difficile et aucun-e des étudiant-es n'a réussi à la traiter complètement.
Rappelons la résolution de l'équation trigonométrique : pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\cos\alpha = \cos\beta \iff (\alpha = \beta \pmod{2\pi} \text{ ou } \alpha = -\beta \pmod{2\pi}).$$

Le système est donc équivalent à

$$\begin{cases} \cos x = \cos y \\ \cos(y-x) = \cos x \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{cases} x = y \pmod{2\pi} \\ \text{ou} \\ x = -y \pmod{2\pi} \end{cases} \\ \text{et} \\ \begin{cases} x = y - x \pmod{2\pi} \\ \text{ou} \\ x = x - y \pmod{2\pi} \end{cases} \end{cases}$$

La quatrième de ces équations implique que $y = 0 \pmod{2\pi}$, or par hypothèse $0 < y < 2\pi$, cette dernière équation n'est donc jamais satisfaite. Nous en déduisons que $y = 2x \pmod{2\pi}$. Il nous reste donc deux cas :

$$\begin{cases} x = y \pmod{2\pi} \\ \text{et} \\ y = 2x \pmod{2\pi} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -y \pmod{2\pi} \\ \text{et} \\ y = 2x \pmod{2\pi} \end{cases}$$

Le premier de ces deux systèmes implique que $x = 2x \pmod{2\pi}$ donc $x = 0 \pmod{2\pi}$. Or par hypothèses $0 < x < 2\pi$, ce système n'est donc jamais satisfait.
Le deuxième de ces deux systèmes implique lui que $3x = 0 \pmod{2\pi}$ et à nouveau comme $0 < x < 2\pi$, il implique que $x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$. Remarquon que $2\frac{4\pi}{3} = \frac{8\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$. Comme $0 < y < 2\pi$ si $x = \frac{2\pi}{3}$ alors $y = 2x = \frac{4\pi}{3} \pmod{2\pi}$ et $y = \frac{4\pi}{3}$. Et si $x = \frac{4\pi}{3}$ alors $y = 2x = \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$ et $y = \frac{2\pi}{3}$.Finalement comme $x < y$, nous excluons $(x, y) = (\frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$.
L'unique solution de ce système est donc $x = \frac{2\pi}{3}$ et $y = \frac{4\pi}{3}$ (nous vérifions en effet que $\cos x = \cos y = -\frac{1}{2} = \cos(y - x) = \cos(x - y)$.

6. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de rayon $R > 0$. On note O son centre.
a. Étant donné un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(R, 0)$, $B(R\cos\beta, R\sin\beta)$ et $C(R\cos\gamma, R\sin\gamma)$ avec $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 \leq \beta \leq \gamma \leq 2\pi$.
i. Montrer que l'aire du triangle ABC est $\dfrac{R^2}{2}(\sin(\gamma - \beta) - \sin\gamma + \sin\beta)$. Dans la suite, cette aire sera notée $f(\beta, \gamma)$.

Nous calculons les coordonnées par rapport à la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j})$:

$$\overrightarrow{AB}(R(\cos\beta - 1), R\sin\beta), \quad \overrightarrow{AC}(R(\cos\gamma - 1), \sin\gamma).$$

L'aire du triangle ABC est donc la moitié de la valeur absolue du déterminant de la matrice formée par ces coordonnées :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{ABC} &= \left|\frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} R(\cos\beta - 1) & R(\cos\gamma - 1) \\ R\sin\beta & R\sin\gamma\end{pmatrix}\right| = \frac{R^2}{2}\left|(\cos\beta - 1)\sin\gamma - (\cos\gamma - 1)\sin\beta\right| \\ &= \frac{R^2}{2}\left|\cos\beta\sin\gamma - \cos\gamma\sin\beta - \sin\gamma + \sin\beta\right| = \frac{R^2}{2}\left|\sin(\gamma - \beta) - \sin\gamma + \sin\beta\right|.\end{aligned}$$

Nous reconnaissons la formule proposée avec une valeur absolue. Nous déterminons le signe en factorisant notre calcul :

$$\begin{aligned}\sin(\gamma - \beta) - \sin\gamma + \sin\beta &= 2\sin\frac{\gamma - \beta}{2}\cos\frac{\gamma - \beta}{2} - 2\sin\frac{\gamma - \beta}{2}\cos\frac{\gamma + \beta}{2} = 2\sin\frac{\gamma - \beta}{2}\left(\cos\frac{\gamma - \beta}{2} - \cos\frac{\gamma + \beta}{2}\right) \\ &= 2\sin\frac{\gamma - \beta}{2} \times \left(-2\sin\frac{\frac{\gamma - \beta}{2} - \frac{\gamma + \beta}{2}}{2}\sin\frac{\frac{\gamma - \beta}{2} + \frac{\gamma + \beta}{2}}{2}\right) = -4\sin\frac{\gamma - \beta}{2}\sin\frac{-\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = 4\sin\frac{\gamma - \beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\end{aligned}$$

Or d'après les hypothèses $0 < \gamma - \beta < 2\pi$ donc $0 < \frac{\gamma - \beta}{2} < \pi$ et $\sin\frac{\gamma - \beta}{2} > 0$. De même $0 < \frac{\beta}{2} < \pi$ donc $\sin\frac{\beta}{2} > 0$. Et finalement $0 < \frac{\gamma}{2} < \pi$ et donc $\sin\frac{\gamma}{2} > 0$.
Avec ces calculs difficiles, nous avons démontré que le terme à l'intérieur de la valeur absolue est strictement positif (avec les hypothèses de l'énoncé) et donc que

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{R^2}{2}(\sin(\gamma - \beta) - \sin\gamma + \sin\beta).$$

Notez l'aisance en calculs trigonométriques du correcteur :

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta \qquad \sin\gamma - \sin\beta = 2\sin\frac{\gamma - \beta}{2}\cos\frac{\gamma + \beta}{2} \qquad \cos a - \cos b = -2\sin\frac{a - b}{2}\sin\frac{a + b}{2}$$

Un beau raisonnement géométrique illustré par une belle figure est certainement préférable : l'aire de ABC est égale à l'aire OBC moins l'aire de OAC plus l'aire de OAB. Ces trois aires correspondent au trois termes du membre de droite. Attention à faire des dessins convainquant pour tous les cas de figures.

ii. Montrer que f admet un maximum atteint en un point (β_0, γ_0) tel que $0 < \beta_0 < \gamma_0 < 2\pi$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$ ou plutôt ici sur le triangle $0 \leq x \leq y \leq 2\pi$. Ce domaine est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$, donc d'après le théorème de Heine, f atteind ses extréma et en particulier son maximum M. Nous avons calculé aux questions précédentes que $f(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{4}R^2 > 0$ est l'aire du triangle équilatéral, donc le maximum M est strictement positif. Ce maximum est atteind en (β_0, γ_0) un point du domaine donc $0 \leq \beta_0 \leq \gamma_0 \leq 2\pi$. Nous remarquons que si $\beta_0 = 0$ ou si $\gamma_0 = 2\pi$ ou si $\beta_0 = \gamma_0$ alors $f(\beta_0, \gamma_0) = 0$ ce que nous avons exclu.
Finalement ce maximum M est bien atteint en un point (β_0, γ_0) avec $0 < \beta_0 < \gamma_0 < 2\pi$.

iii. Déterminer β_0 et γ_0. Quelle est alors la nature du triangle obtenu ?

Fixons $\gamma = \gamma_0$ et faisons varier β. La fonction $\beta \mapsto f(\beta, \gamma_0)$ admet un maximum sur $]0; \gamma_0[$ en β_0, comme cette fonction est dérivable, sa dérivée en β_0 est nulle. Nous pouvons calculer cette dérivée comme étant la première dérivée partielle de la fonction f. Nous obtenons l'équation

$$0 = \frac{\partial f}{\partial \beta}(\beta_0, \gamma_0) = \frac{R^2}{2}(-\cos(\gamma_0 - \beta_0) + \sin\beta_0).$$

De même la fonction $\gamma \mapsto f(\beta_0, \gamma)$ admet un maximum en γ_0 sur $]\beta_0, 2\pi[$, donc sa dérivée y est nulle :

$$0 = \frac{\partial f}{\partial \gamma}(\beta_0, \gamma_0) = \frac{R^2}{2}(\cos(\gamma_0 - \beta_0) - \sin\gamma_0).$$

Le couple (β_0, γ_0) est donc solution du système d'équation de la question 5). Nous avons vu que ce système admet une unique solution, donc

$$\beta_0 = \frac{2\pi}{3} \text{ et } \gamma_0 = \frac{4\pi}{3}.$$

Le maximum est donc atteint lorsque le triangle ABC est équilatéral.

b. Déterminer l'aire maximale d'un triangle inscrit dans $\mathcal{C}$.

Nous déduisons des questions précédentes que l'aire maximale du triangle ABC inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ est atteinte pour

$$M = f(\beta_0, \gamma_0) = f(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$$

c'est-à-dire lorsque le triangle est équilatéral.
Nous remarquons que dans les questions précédentes nous avons fait varier B et C sur le cercle par rapport au premier sommet A, nous avons donc envisagé tous les triangles inscrits dans $\mathcal{C}$.

7. Démontrer que si $\mathcal{C}$ est un cercle d'aire $\mathcal{A}_\mathcal{C}$ circonscrit à un triangle $\mathcal{T}$ d'aire $\mathcal{A}_\mathcal{T}$, alors $\dfrac{\mathcal{A}_\mathcal{C}}{\mathcal{A}_\mathcal{T}} \geq \dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}$ avec égalité si et seulement si le triangle est équilatéral.

D'après la question précédente l'aire du triangle $\mathcal{T}$ est inférieure à celle d'un triangle $\mathcal{T}_0$ équilatéral inscrit dans $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{A}_\mathcal{T} \leq \mathcal{A}_{\mathcal{T}_0}.$$

L'aire de ce triangle équilatéral a été calculée à la question 4) : $\mathcal{A}_{\mathcal{T}_0} = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$ où R est le rayon du cercle. Alors que l'aire du cercle est $\mathcal{C} = \pi R^2$. Nous avons donc démontré l'inégalité : pour tout triangle $\mathcal{T}$ inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$:

$$\frac{\mathcal{A}_\mathcal{C}}{\mathcal{A}_\mathcal{T}} \geq \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

8. Proposer une activité avec un logiciel de géométrie dynamique permettant à des élèves de collège de conjecturer le résultat démontré à la question précédente.

Avec Geogebra, tracer un cercle. Placer trois points A, B et C sur ce cercle. Afficher l'aire du triangle ABC.
Demander aux élèves de faire varier les points A, B et C sur le cercle pour déterminer le maximum de l'aire.
Comme il s'agit ici d'un problème à deux (ou trois si on déplace aussi le point A) paramètres, il faut sans doute d'abord fixer les points A et B et faire varier seulement C.
On peut ensuite demander aux élèves de faire le rapport avec l'aire du disque pour constater que le même rapport maximal est trouvé par toute la classe.

Propriétés des affinités orthogonales

Étant donné une droite $\mathcal{D}$ et un nombre réel $\lambda \neq 0$ l'affinité orthogonale du plan euclidien d'axe $\mathcal{D}$ et de rapport λ est la transformation du plan qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{HM'} = \lambda\overrightarrow{HM}$ où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.

9. Soit $ABCD$ un rectangle d'aire $\mathcal{A}$. Soit g une affinité d'axe (AB) et de rapport λ.
a. Déterminer $A' = g(A)$ et $B' = g(B)$.

Comme A est un point de la droite (AB), il est égal à son projeté orthogonal H et donc la définition de l'affinité nous donne $\overrightarrow{HA'} = \lambda\overrightarrow{HA} = \lambda\vec{0} = \vec{0}$. Donc $A' = g(A) = A$.
De même B est un point fixe de l'affinité : $g(B) = B' = B$.

b. Démontrer que l'image $A'B'C'D'$ de $ABCD$ par g est un rectangle.

Comme $ABCD$ est un rectangle, A est le projeté orthogonal de D sur la droite (AB). Donc l'image $D' = g(D)$ du point D est telle que $\overrightarrow{AD'} = \lambda\,\overrightarrow{AD}$. Nous en déuisons que les points A, D et D' sont alignés, que les droites (AD) et (AD') sont égales et comme $ABCD$ est un rectangle la droite $(A'D') = (AD)$ est perpendiculaire à la droite $(AB) = (A'B')$.
De même $\overrightarrow{BC'} = \lambda\overrightarrow{BC}$ et comme $ABCD$ est un parallélogramme, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ donc $\overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{B'D'}$. Ce qui démontre que $A'B'C'D'$ est un parallélogramme.
De plus ce parallélogramme a deux côtés consécutifs perpendiculaires, c'est donc un rectangle.

c. Déterminer l'aire $\mathcal{A}'$ du rectangle $A'B'C'D'$.

L'aire d'un rectangle est égale à la longueur fois la longueur, donc ici, en utilisant la réponse précédente : $\mathcal{A}' = A'B' \times A'C' = AB \times AC' = AB \times \|\lambda\overrightarrow{AC}\| = |\lambda|AB \times AC = |\lambda|\mathcal{A}$.
Trop de copies oublient la valeur absolue de λ : il est parfaitement possible de faire des affinités orthogonales avec $\lambda = -2$. Votre copie DOIT comporter des figures avec différents exemples des deux rectangles et au moins deux valeurs de λ par exemple 2 et $-1/2$.

d. Soit $EFGH$ un autre rectangle tel que E et F sont des points de (AB). Soit $\mathcal{A}_1$ l'aire de $EFGH$. Soit $E'F'G'H'$ l'image de $EFGH$ et soit $\mathcal{A}'_1$ son aire. Démontrer que g conserve les rapports d'aires entre les rectangles :

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}_1} = \frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}'_1}.$$

Comme l'affinité g a pour axe (EF) nous pouvons utiliser les questions précédentes : $E' = E$, $F' = F$, $E'F'G'H'$ est un rectangle d'aire $\mathcal{A}'_1 = |\mathcal{A}_1|$.
En effectuant le quotient des deux inégalités (les rectangles sont non dégénérés donc les aires sont non nulles et $\lambda \neq 0$ nous obtenons $\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}_1} = \frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}'_1}$.

On admet dans la suite qu'une affinité orthogonale conserve les rapports d'aires.

10. On se place dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
a. Donner l'équation de l'image du cercle unité par l'affinité orthogonale dont l'axe est l'axe des abscisses et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soit h l'affinité d'axe l'axe des abscisses et de rapport $\lambda \neq 0$. Alors l'image de tout point M de coordonnées (x, y) par rapport au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est le point $h(M) = M'(x', y')$ avec $x' = x$ et $y' = \lambda y$ (en effet le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses est $H(x, 0)$).
Le cercle unité $\mathcal{C}$ a pour équation $x^2 + y^2 = 1$ donc en remplaçant $M \in \mathcal{C}$ si et seulement si $x'^2 + \frac{y'^2}{\lambda^2} = 1$. L'image du cercle unité $\mathcal{C}$ est donc l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation $x^2 + \frac{y^2}{\lambda^2} = 1$.
Le correcteur a grandement apprécié les figures esquissant ce cercle et cette ellipse.

b. Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de centre en O d'équation $ax^2 + by^2 + cxy + f = 0$ avec $(a, b, c, f) \in \mathbb{R}^4$ tel que $c \neq 0$. On pose $\theta = \frac{1}{2}\text{arccotan}(\frac{b-a}{c})$ (c'est-à-dire que $\theta \in]0; \pi[$ et $\text{cotan}(2\theta) = \frac{b-a}{c}$). Démontrer que l'image de $\mathcal{E}$ par la rotation d'angle θ admet une équation de la forme $a'x^2 + b'y^2 + f' = 0$ *(On ne demande pas de calculer a', b' et f').*

Cette question est difficile et calculatoire, une seule d'entre vous y est arrivé.
Nous savons que la matrice de la rotation de centre O et d'angle θ est $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Soit M un point de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Son image M' par la rotation de centre O et d'angle θ a donc pour coordonnées $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_\theta X$. En multipliant par l'inverse de la matrice nous obtenons

$$X = R_\theta^{-1} X' = R_{-\theta} X' = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} X' \iff \begin{cases} x = x'\cos\theta + y'\sin\theta \\ y = -x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$

Nous pouvons alors remplacer dans l'équation de $\mathcal{E}$: pour tout point $M(x, y) \in \mathcal{E}$

$$ax^2+by^2+cxy+f = 0 \Rightarrow a(x'\cos\theta+y'\sin\theta)^2+b(-x'\sin\theta+y'\cos\theta)^2+c(x'\cos\theta+y'\sin\theta)(-x'\sin\theta+y'\cos\theta)+f = 0.$$

Dans cette dernière équation le terme en $x'y'$ a pour coefficient

$$2a\sin\theta\cos\theta - 2b\sin\theta\cos\theta + c(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = (a-b)\sin(2\theta) + c\cos(2\theta).$$

En utilisant le choix de la valeur proposée par l'énoncé nous pouvons calculer

$$\theta = \frac{1}{2}\text{arccotan}(\frac{b-a}{c}) \Rightarrow \text{cotan}(2\theta) = \frac{b-a}{c} \Rightarrow \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{b-a}{c} \Rightarrow (a-b)\sin(2\theta) + c\cos(2\theta) = 0.$$

Le coefficient du terme $x'y'$ est donc nul. Les coordonnées du point M' satisfont donc une équation de la forme $a'x'^2 + b'y'^2 + f = 0$ et l'équation de l'image de $\mathcal{E}$ est de cette forme

$$a'x'^2 + b'y'^2 + f = 0.$$

(Nous n'avons pas terminé le calcul de a' et b' qui n'est pas demandé et nous remarquons que le terme constant f n'a pas changé.)

c. Déduire des deux questions précédentes que toute ellipse peut être transformer en un cercle par une affinité orthogonale.

Nous venons de voir qu'une ellipse $\mathcal{E}$ centrée en O peut être transformée par une rotation en une autre ellipse $\mathcal{E}'$ centrée en O ayant une équation de la forme $a'x^2 + b'y^2 + f = 0$ (avec a', b' et f des nombres réels et $(a', b') \neq (0, 0)$). En généralisant la question 10 a) nous pouvons démontrer que l'affinité d'axe l'axe des abscisses et de rapport $\lambda = \sqrt{\frac{b'}{a'}}$ transforme l'ellipse $\mathcal{E}'$ en un cercle $\mathcal{C}$ centré en O (et de rayon $\sqrt{\frac{-f}{a'}}$).
Attention : avant de quotienter il faut vérifier que $a' \neq 0$. Si $a' = 0$ alors $\mathcal{E}'$ a pour équation $b'y^2 + f = 0$. Cette équation de degré 2 en y a zéro, une ou deux solution et donc $\mathcal{E}'$ est l'ensemble vide, une droite (parallèle à l'axe des abscisses) ou la réunion de deux droites (parallèles à l'axe des abscisses). Aucun de ces trois cas de coniques dégénérées ne sont des ellipses. Donc $a' \neq 0$.
De même avant d'extraire les racines il faut vérifier que $\frac{b'}{a'} > 0$ et $\frac{-f}{a'} > 0$. Si a' et b' sont de signe contraire, alors on reconnait une identité remarquable et l'équation se factorise : $(\sqrt{|a'|}x - \sqrt{|b'|}y)(\sqrt{|a'|}x + \sqrt{|b'|}y) = \pm f$ (le signe devant f dépend du signe de a'), on reconnait l'équation d'une hyperbole si $f \neq 0$ qui n'est pas bornée et n'est donc pas une ellipse, ou bien si $f = 0$ on reconnait la réunion de deux droites sécantes qui n'est pas non plus une ellipse.
Puisque a' et b' sont de même signe quitte à multiplier l'équation par -1 on peut supposer qu'ils sont tous les deux positifs. Si $f > 0$ alors l'équation n'a pas de solution et $\mathcal{E}' = \emptyset$ n'est pas une ellipse.
Dans le raisonnement précédent nous avons supposé que le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ nous était donné. Ce qui n'est pas le cas dans l'énoncé de cette question.
Pour toute ellipse $\mathcal{E}$ nous pouvons choisir pour origine du repère son centre O (il faudrait démontrer que toute ellipse admet un centre). Soit maintenant $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée. L'ellipse $\mathcal{E}$ a par rapport au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ une équation de la forme $ax^2 + by^2 + cxy + f = 0$ avec $(a, b, c, f) \in \mathbb{R}^4$. Soit $\theta = \frac{1}{2}\text{arccotan}(\frac{b-a}{c})$ si $c \neq 0$ et $\theta = 0$ si $c = 0$. Soit $\vec{e}$ l'image de $\vec{i}$ par la rotation d'angle $-\theta$ et $\vec{f}$ l'image de $\vec{j}$ par la rotation d'angle $-\theta$. Dans le repère orthonormal $(0; \vec{e}, \vec{f})$ l'équation de $\mathcal{E}$ est donc de la forme $a'x'^2 + b'y'^2 + f = 0$ avec $(a', b') \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ (changer de repère revient à appliquer la matrice R_θ aux coordonnées). Nous pouvons alors appliquer une affinité orthogonale par rapport à l'axe des abscisses $(O, \vec{e})$ pour transformer $\mathcal{E}$ en un cercle (centré en O).
Nous avons bien démontré que pour toute ellipse il existe une affinité orthogonale qui la transforme en un cercle.

Conclusion.

11. Démontrer que parmi les ellipses circonscrites au triangle IJK défini dans la question 3, il en existe une et une seule délimitant une surface d'aire minimale. *On rappelle qu'on a démontré à la question 9 qu'une affinité orthogonale conserve les rapports d'aires et à la question 10 que toute ellipse peut-être transformée en un cercle par une affinité orthogonale.*

Existence : Soit $\mathcal{E}$ une ellipse circonstrite au triangle IJK et soit $\mathcal{A}_\mathcal{E}$ son aire. Soit g une affinité orthogonale qui transforme $\mathcal{E}$ en un cercle $\mathcal{C}$. Soit $I' = g(I)$, $J' = g(J)$ et $K' = g(K)$ les images par g. Alors $I'J'K'$ est un triangle inscrit dans $\mathcal{C}$.
D'après la question 7, nous savons que $\frac{\mathcal{A}_\mathcal{C}}{\mathcal{A}_{I'J'K'}} \geq \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$ avec égalité si et seulement si $I'J'K'$ est équilattéral.
D'après la question 10, l'affinité g concerne les rapports d'aire donc $\frac{\mathcal{A}_\mathcal{E}}{\mathcal{A}_{IJK}} = \frac{\mathcal{A}_\mathcal{C}}{\mathcal{A}_{I'J'K'}} \geq \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.
D'après la question 4, l'aire du cercle unité est donc le minimum des aires des ellipses circonscrites au triangle IJK.
Unicité : Si $\mathcal{E}$ est une ellipse d'aire minimale (donc égale à celle du cercle unité) circonscrite à IJK alors l'affinité g ci-dessus envoie le triangle équilatéral IJK sur un triangle équilatéral $I'J'K'$. Or une transformation affine est complètement déterminée par l'image de trois points non-alignés, donc g est une similitude (composée d'une isométrie et d'une homothétie) donc g^{-1} transforme le cercle $\mathcal{C}$ en un cercle et donc $\mathcal{E}$ est un cercle : le cercle circonscrit à IJK.
Nous avons démontré qu'il existe une unique ellipse d'aire minimale circonscrite au triangle IJK : son cercle circonscrit.

Extension à tous les triangles.

12. a. Soit ABC un triangle non-aplati quelconque du plan dont $[AB]$ est le plus grand côté. Trouver une affinité orthogonale g d'axe (AB) telle que l'image du triangle ABC par f soit isocèle en A. Vous préciserez le rapport de cette affinité en fonction des distances AB, AH et HC où H est le projeté orthogonal de C sur (AB).

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon $[AB]$.
Vérifions que $AH \leq AB$: Dans le triangle , ACH, rectangle en H, d'après le théorème de PYTHAGORE $AH^2 = AC^2 - HC^2$. Comme par hypothèse ABC n'est pas aplati, $HC > 0$ et comme AB est le plus grand côté du triangle : $AH < AC \leq AB$.
Le cercle $\mathcal{C}$ intersecte donc la hauteur (AH) en deux points C' et C'' qui sont distinctes de H. Comme C, H et C' sont alignés et que $H \neq C$ et $H \neq C'$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\overrightarrow{HC'} = \lambda\overrightarrow{HC}$.
Soit g l'affinité orthogonale d'axe (AB) et de rapport λ. Alors $C' = g(C)$ et comme C' est sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon AB, le triangle ABC' est isocèle en A.
Précisons la valeur de λ : Dans le triangle rectangle en H, $AC'H$, d'après le théorème de PYTHAGORE, $AC'^2 = AH^2 + HC'^2 = AH^2 + \lambda^2 HC^2$. Nous pouvons donc choisir n'importe laquelle des deux valeurs possibles $\lambda = \pm\frac{\sqrt{AB^2 - AH^2}}{HC}$ pour trouver C ou C'. Remarquons enfin que nous avonsbien vérifié plus haut que le terme sous la racine carrée est strictement positif et que le dénominateur est non-nul.

b. Soit ABC' un triangle non-aplati isocèle en A. Trouver une affinité orthogonale h d'axe (BC') telle que l'image du triangle ABC' par g soit équilatéral. Vous préciserez le rapport de cette affinité.

Par un raisonnement analogue comme le pied K de la hauteur issue de A est à l'intérieur du segment $[BC']$, nous pouvons placer deux points A' et A'' sur la hauteur (AK) tels que $BA' = BC'$. Nous pouvons donc trouver une affinité orthogonale de rapport μ et d'axe (BC') qui transforme A en A'.
Nous pouvons (toujours en utilisant le théorème de PYTHAGORE) calculer les deux valeurs possibles pour le rapport μ :

$$A'B^2 = BC'^2 = A'K^2 + BK^2 = \mu^2 AK^2 + BK^2 \iff \mu = \pm\frac{\sqrt{BC'^2 - BK^2}}{AK} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{BC'}{AK}.$$

c. En déduire que tout triangle peut-être transformée par la composée de deux affinités orthogonales en un triangle équilatéral.

Soit ABC un triangle, alors nous avons vu à la question 12 a) qu'il existe une affinité orthogonale g qui transforme ABC en un triangle isocèle ABC' et nous avons vu à la question 12 b) qu'il existe une affinité orthogonale h qui transforme ABC' en un triangle équilatéral $A'BC'$.
Pour tout triangle (non-dégénéré) il existe deux affinités orthogonales g et h dont la composée $h \circ g$ le transforme en un triangle équilatéral.

13. Conclure en démontrant que pour tout triangle ABC, parmi les ellipses circonscrites au triangle ABC il en existe une et une seule délimitant une surface d'aire minimale.

Soit ABC un triangle et g et h deux affinités orthogonales telles que $h \circ g$ transforme ABC en un triangle équilatéral $A'B'C'$.
Nous avons vu à la question 11 que le cercle $\mathcal{C}'$ circonscrit à $A'B'C'$ est l'unique d'aire minimale circonscrite à $A'B'C'$. Comme g et h sont des bijections et que leurs bijections réciproques sont des affinités orthogonales nous pouvons considérer $\mathcal{E}_0 = g^{-1}(h^{-1}(\mathcal{C}))$ qui est une ellipse circonstrite à ABC.
Soit $\mathcal{E}$ une autre ellipse circonscrite à ABC. Alors $\mathcal{E}' = h(g(\mathcal{E}))$ est une ellipse circonscrite au triangle équilatéral $A'B'C'$ et nous avons démontré à la question 11 que l'aire $\mathcal{E}'$ est plus grande que l'aire de $\mathcal{C}$.
Comme les affinités orthogonales conservent les rapports d'aire, l'aire de $\mathcal{E}$ est plus grande que l'aire de $\mathcal{E}_0$.
Nous avons donc démontré l'existence et l'unicité d'une ellipse d'aire minimale circonscrite à un triangle ABC.