Faculté des sciences
Université d'Aix-Marseille

Préparation au Capes de mathématiques, master Meef, 1re année
Géométrie

Devoir surveillé
mercredi 4 décembre 2019

☐ Aix-Montperrin
☐ Luminy
☐ Saint-Charles
☒ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Deux heures, ni calculatrices ni documents

Enseignant : T. Coulbois

Les deux problèmes sont indépendants.

Problem I. Groupe des translations-rotations. *Le but de ce problème est de démontrer que l'ensemble des rotations et des translations du plan forme un groupe.*

Dans tout le problème le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Parite linéaire d'une rotation.

a. Pour tout réel θ, déterminer les valeurs propres complexes de la matrice $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (on distinguera les cas particuliers où les valeurs propres sont réels).

On conserve la notation R_θ pour la suite du problème.

b. Pour tous réels θ et θ', démontrer que $R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$.
c. Pour tout matrice A orthogonale et de déterminant $+1$ démontrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $A = R_\theta$.

2. Point fixe d'une rotation.

a. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv 0 \mod 2\pi$. Démontrer que si r est une transformation affine dont la partie linéaire a pour matrice R_θ, alors r possède exactement un point fixe.
b. Si $\theta \equiv 0 \mod 2\pi$, montrer que si f est une transformation affine dont la partie linéaire a pour matrice R_0 alors, soit f est l'identité du plan affine, soit f n'a aucun point fixe.

Dans la suite du problème on admet qu'une rotation est une transformation affine r du plan dont la partie linéaire a pour matrice R_θ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$ (où θ est l'angle de la rotation) avec la condition que si $\theta \equiv 0 \mod 2\pi$ alors r est l'identité du plan affine.

c. On considère les transformations du plan

$$r : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2-y \\ 3+x \end{pmatrix} \end{array} \qquad r' : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 1-y \\ 2+x \end{pmatrix} \end{array}$$

Démontrer que r et r' sont des rotations dont on déterminera les angles et les points fixes.
d. Déterminer la transformation affine $r \circ r'$, si c'est une rotation, on précisera son angle et son point fixe.
e. De même, déterminer la transformation affine $r^{-1} \circ r'$

3. Composition de rotations et de translations.

a. On considère le point $A(2,1)$ et la rotation $r_{A,\frac{\pi}{3}}$ de centre A et d'angle $\pi/3$. On considère la translation $t_{\vec{j}}$ de vecteur $\vec{j}$. Démontrer que $f = r \circ t_{\vec{j}}$ est une rotation dont on déterminera l'angle et le centre. *Vous pourrez utiliser la forme analytique ou bien raisonner géométriquement, dans tous les cas une figure sera appréciée.*
b. Démontrer que la composée de deux rotations est une rotation ou une translation *(on distinguera rigoureusement les deux cas).*

4. Groupe des rotations-translations.

On considère l'ensemble

$$\mathcal{RT} = \{r_{\Omega,\theta} \mid \Omega \text{ un point et } \theta \in \mathbb{R}\} \cup \{t_{\vec{u}} \mid \vec{u} \text{ vecteur du plan}\}$$

Démontrer que $\mathcal{RT}$ est un groupe pour la composition.

Problem II. Tangentes à une parabole.

Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère :

— la parabole $\mathcal{P} : y = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$;
— le point $A(-2, -2)$;
— pour tout réel t la droite $\Delta_t : tx - (t+1)y - 2 = 0$.

1. Démontrer que pour tout réel t la droite Δ_t passe par A.
2. Déterminer en fonction de t, le nombre de points d'intersection de la drotie Δ_t avec la parabole $\mathcal{P}$.
3. En déduire que les tangentes à la parabole $\mathcal{P}$ passant par A sont les droites Δ_t avec $t = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$.

Droite orthoptique à une parabole.

Pour un nombre réel $a \in \mathbb{R}$ nous considérons la droite $\mathcal{D}_a$ d'équation $y = ax - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}$.

4. Démontrer que pour tout nombre réel a, la droite $\mathcal{D}_a$ est tangente à la parabole $\mathcal{P}$.
5. Démontrer que pour tout nombre réel $a \neq 0$, les droites $\mathcal{D}_a$ et $\mathcal{D}_{\frac{-1}{a}}$ sont perpendiculaires.
6. Démontrer que le point d'intersection des droites $\mathcal{D}_a$ et $\mathcal{D}_{\frac{-1}{a}}$ appartient à la droite d'équation $y = -1$.
7. Démontrer que la droite d'équation $y = -1$ est l'ensemble des points du plan par lesquels il passe deux tangentes à la parabole $\mathcal{P}$ qui sont perpendiculaires entre elles.