Faculté des sciences
Université d'Aix-Marseille

Master Meef mathématiques, 1re année, T. Coulbois

Capes blanc
mercredi 6 novembre 2019

☐ Aix-Montperrin
☐ Luminy
☐ Saint-Charles
☒ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Deux heures et demi. Ni calculatrices, ni documents.

Exercice I. **Cours. 1.** Dans le plan vectoriel rapporté à une base, démontrer que deux vecteurs $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$ sont colinéaires si, et seulement si, $xy'-x'y=0$.
2. Pour deux points distincts A et B, démontrer que l'ensemble des barycentres de A et B est égal à la droite (AB).

3. Pour quelles valeurs du paramètre m le système ci-contre admet-il des solutions ? *On ne demande pas de calculer ses solutions si elles existent.*
$$\left\{\begin{array}{rcl} mx-2y & = & 3 \\ -x+(m+1)y & = & -3 \end{array}\right.$$

Exercice II. **1.** Dans le plan rapporté à un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$: **a.** placer les points $A(-1,2)$, $B(2,3)$, $C(3,-2)$;
b. tracer la droite $\mathcal{D}:\ x+y=0$
2. **a.** Donner une équation de la droite (AB). **b.** Donner une équation de la parallèle à $\mathcal{D}$ passant par C.
3. Déterminer l'intersection de la droite (AB) et de la parallèle à $\mathcal{D}$ passant par C.
4. **a.** Pour un point $M_0(x_0,y_0)$ quelconque du plan déterminer l'équation de la droite passant par M_0 et parallèle à $\mathcal{D}$.
b. Déterminer le projeté $M_1(x_1,y_1)$ de M_0 sur la droite (AB) parallèlement à la droite $\mathcal{D}$. Vous écrirez une équation matricielle donnant $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ en fonction de $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

Exercice III. Dans le plan rapporté à un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, pour un paramètre réel m, on considère la droite

$$\mathcal{D}_m : mx+(1-m)y=m+1.$$

1. Démontrez que les droites $(D_m)_{m\in\mathbb{R}}$ sont concourantes en un point A que vous déterminerez.
2. Quelle est l'unique droite passant par A qui n'appartient pas à la famille $(D_m)_{m\in\mathbb{R}}$?
3. Pour les différentes valeurs du paramètre m, déterminer les positions reatives de la droite D_m et de la droite Δ_m d'équation : $-4x+my+6=0$.
4. Pour un paramètre $m\neq 2$ soit C_m l'intersection de D_m et Δ_m. Démontrez que les points C_m sont tous alignés sur une droite $\mathcal{D}'$ que vous déterminerez.

Problème IV. **Théorème de Ménélaüs.** On se donne dans le plan trois points non-alignés A, B et C. Soient D,E et F des points des droites (BC), (AC) et (AB) respectivement, différents de A, B et C. Le théorème de Ménélaüs affirme que les points D, E et F sont alignés si, et seulement si,

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}\times\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}\times\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}}=1.$$

Remarque : on utilise la mesure algébrique des segments qui est la longueur affectée d'un signe dépendant de l'orientation. C'est-à-dire que $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}=\frac{DB}{DC}$ *si D est à l'extérieur du segment $[BC]$ et* $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}=-\frac{DB}{DC}$ *si D est entre B et C. Dans tous les cas* $\overrightarrow{DB}=\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}\overrightarrow{DC}$.

On considère le repère $\mathcal{R}=(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$. Comme F est un point de la droite (AB), ses coordonnées par rapport au repère $\mathcal{R}$ sont de la forme $(f,0)$ où f est un nombre réel. De même E est un point de la droite (AC) et donc de coordonnées $(0,e)$ avec e un nombre réel. Finalement on considère les coordonnées (x,y) du point D par rappor tau repère $\mathcal{R}$.
1. Donner une équation de la droite (BC) par rapport au repère $\mathcal{R}$.
2. Démontrer que les points D, E et F sont alignés si, et seulement si, $\begin{vmatrix} 1 & f & 0 \\ 1 & 0 & e \\ 1 & x & y \end{vmatrix}=0$. *(Vous pourrez calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ par rapport à la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.)*
3. Démontrer que $\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}}=\frac{f}{f-1}$ **4.** Démontrer que $\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}=\frac{e-1}{e}$
5. **a.** Démontrer que $\overrightarrow{BD}=y\overrightarrow{BC}$ **b.** En déduire que $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}=-\frac{y}{x}$.
6. Conclure en démontrant le théorème de Ménélaüs.