INSPE d'Aix-Marseille-Université
M1 MEEF MATHS

Epreuve blanche du jeudi 6 février 2020
8h00-13h00

Téléphones et calculatrices interdits.
Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction dans l'évaluation des copies.

Problème 1

On se place dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

Questions préliminaires

1. On considère un vecteur $\vec{u}(a, b)$ de $\mathcal{P}$. Rappeler la définition de la translation $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$, et en donner une expression analytique dans le repère $\mathcal{R}$ (autrement dit exprimer les coordonnées (x', y') de l'image M' par $t_{\vec{u}}$ d'un point $M(x, y)$).
2. On considère un nombre réel non nul k et un point $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ de $\mathcal{P}$. Rappeler la définition de l'homothétie $h_{\Omega,k}$ de centre Ω et de rapport k, et en donner une expression analytique dans le repère $\mathcal{R}$.

Première partie

1. On considère le point $A(2, 0)$, et on désigne par λ un nombre réel. A tout point M de $\mathcal{P}$ on fait correspondre le point M' barycentre des points pondérés $(O, \frac{1}{2})$, $(A, \frac{1}{2} - \lambda)$ et (M, λ).
   Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OM'}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM}$. En déduire les coordonnées (x', y') de M' en fonction des coordonnées (x, y) de M.
2. On note f_λ l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à un point M associe le point $f_\lambda(M) = M'$ défini dans la question précédente.
   (a) Montrer qu'il existe un nombre réel λ_0 tel que f_λ est une bijection de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ si et seulement si $\lambda \neq \lambda_0$.
   Préciser la nature de l'application f_{λ_0}.
   (b) Etudier les points fixes de f_λ.
   (c) Trouver la nature de f_λ lorsque $\lambda \neq \lambda_0$ et en donner les éléments déterminants.
3. On note $\mathcal{F} = \{f_\lambda \; ; \; \lambda \in \mathbb{R}, \; \lambda \neq \lambda_0\}$. Montrer que si λ et λ' sont deux nombres réels distincts et différents de λ_0, l'application $f_\lambda \circ f_{\lambda'}$ n'appartient pas à $\mathcal{F}$.

4. On fixe un point M du plan, M distinct de A, et on considère l'application g_M de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{P}$ qui à λ associe $M' = f_\lambda(M)$.
   (a) Montrer que l'ensemble des points $M' = g_M(\lambda)$ obtenus lorsque λ décrit $\mathbb{R}$ est une droite $\mathcal{D}_M$.
   (b) Soit g^*_M l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{D}_M$ qui à un nombre réel λ associe le point $g_M(\lambda)$. L'application g^*_M est-elle bijective ?
5. On considère maintenant l'application d de $\mathcal{P}$ dans l'ensemble E des droites de $\mathcal{P}$, qui à M associe la droite $\mathcal{D}_M$ définie dans la question précédente.
   (a) L'application d est-elle injective ?
   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante à laquelle doit satisfaire une droite $\mathcal{D}$ du plan pour qu'elle soit l'image d'un point M par l'application d.

Deuxième partie *Cette partie peut être traitée indépendamment du reste du problème.*

A tout nombre réel λ on associe le point M_λ de coordonnées (λ, λ), puis le point M'_λ défini comme dans la première question : le point M'_λ est le barycentre des points pondérés $(O, \frac{1}{2})$, $(A, \frac{1}{2} - \lambda)$ et (M_λ, λ). On appelle h l'application qui à tout nombre réel λ associe de cette manière le point $h(\lambda) = M'_\lambda$.

1. Exprimer les coordonnées (x_λ, y_λ) de $h(\lambda)$ en fonction de λ.
2. Montrer que lorsque λ décrit $\mathbb{R}$, l'ensemble des points $h(\lambda)$ est inclus dans la courbe (Γ) d'équation cartésienne
$$(x - y - 1)^2 - 4y = 0 .$$
3. Reconnaître la nature de la courbe (Γ) en en déterminant une équation dans le repère $\mathcal{R}' = (O, \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j}), \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{j} - \vec{i}))$. On précisera les points d'intérêt particulier et axes de symétrie éventuels de (Γ).
4. Préciser les coordonnées de $h(\lambda)$ dans ce nouveau repère.
5. Déterminer des équations cartésiennes de la tangente à (Γ) au point $h(\lambda)$ dans le repère $\mathcal{R}'$, puis dans le repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.
6. Déterminer des équations des tangentes à (Γ) aux points de (Γ) situés sur les axes du repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.
7. Construire (Γ) et préciser l'ensemble des points $h(\lambda)$ lorsque λ décrit $\mathbb{R}$. On indiquera quelques points $h(\lambda)$ sur la figure, dont ceux correspondant à $\lambda = -2,\ -1,\ 0,\ +1,\ +2$, ainsi que les tangentes en ces points.