Problème 3 : géométrie

Dans tout le problème ABC désigne un triangle non aplati.

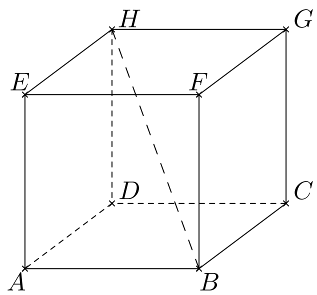
1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur le triangle ABC pour que les médiatrices des côtés $[AB]$ et $[AC]$ soient perpendiculaires.
2. Montrer que les bissectrices intérieures des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ ne peuvent pas être perpendiculaires.
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur le triangle ABC pour que les hauteurs issues des sommets B et C soient perpendiculaires.
4. On pose $BC = a$, $CA = b$ et $AB = c$ et on note I, J et K les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.
   - 4.1. Démontrer, avec les outils du collège, que les médianes d'un triangle sont concourantes en un point G situé au $\dfrac{2}{3}$ de chaque médiane en partant du sommet.
   - 4.2. Démontrer que :

$$c^2 + b^2 = 2AI^2 + \frac{a^2}{2} \qquad \text{(théorème de la médiane)}\,.$$

   - 4.3. En déduire que les médianes issues de B et C sont perpendiculaires si et seulement si :

$$c^2 + b^2 = 5a^2\,.$$

5. On considère un cube $ABCDEFGH$.



En utilisant le résultat de la question 4.3, expliquer comment, sur la figure précédente, on peut construire uniquement à l'aide de la règle le point A' projeté orthogonal du point A sur la droite (BH).