Faculté des sciences
Université d'Aix*Marseille

Corona-problème
jeudi 1er juillet 2020

☐ Aix-Montperrin
☐ Luminy
☐ Saint-Charles
☒ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Préparation au Capes de mathématiques, master Meef, 1re année

À déposer sur Ametice Enseignant : T. Coulbois

Les deux problèmes sont indépendants.

Exercice I. [D'après un sujet de baccalauréat de 1999].
Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. Soit A le point d'affixe $-2+3i$ et B le point d'affixe $1-3i$. Soit M le point d'affixe z, $z\neq -2+3i$; à z on associe le nombre complexe z' tel que : $z'=\dfrac{z-1+3i}{z+2-3i}$

1. a. Établir une relation entre un argument de z' et l'angle orienté $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})$.
b. Déterminer et construire l'ensemble $(E1)$ des points M du plan tels que z' ait pour argument $\frac{\pi}{2}$
2. Déterminer et construire l'ensemble $(E2)$ des points M du plan tels que $|z'|=2$.
3. Déterminer l'affixe du point commun K à $(E1)$ et $(E2)$.

Problème

Dans ce problème les points du plan sont identifiés à leurs affixes.

Soit H le demi-plan complexe ouvert supérieur : $H=\{z\in\mathbb{C}\mid \operatorname{Im}(z)>0\}$.

Dans ce problème, une homographie est une transformation de H définie par $z\mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ où a,b,c,d sont des nombres réels et $ad-bc>0$. On dit que la matrice $\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ est associée à l'homographie.

1. On considère l'homographie $\varphi : z\mapsto \frac{z+1}{z+2}$.
a. Placez dans le plan complexes les points $i-1$, $2i-2$, $i-3$, $-\frac{3}{2}+(1+\frac{\sqrt{3}}{2})i$ et leurs images par φ.
b. Soit z un nombre complexe de partie réelle -2, déterminer la partie réelle de $\varphi(z)$.
c. Soit x un nombre réel différent de -2. Soit z un point de H de partie réelle x et soit $z'=\varphi(z)$. On considère A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe $\frac{x+1}{x+2}$.
Calculer l'angle $(\overrightarrow{M'A},\overrightarrow{M'B})$ où M' est le point d'affixe z'. En déduire que l'image par φ de la demi-droite verticale de partie réelle x et de partie imaginaire strictement positive est le demi-cercle de diamètre $[AB]$ et de partie imaginaire strictement positive.

2. Le groupe des homographies. Soit φ une homographie associée à une matrice A.

a. Démontrer que A est inversible.
b. Soit $\lambda > 0$, démontrer que la matrice λA est aussi associée à φ.
c. Soit ψ une autre homographie associée à une matrice B. Démontrer que la composée $\varphi \circ \psi$ est associée à la matrice $A\,B$.
d. Démontrer que toute homographie est une bijection de H.
e. Démontrer que les homographies forment un groupe.

3. paramétrage d'un cercle.
Soit D le point d'affixe -2 et E celui d'affixe -1. On dénote par $\mathcal{D}$ le demi-cercle supérieur de diamètre $[DE]$.
a. Démontrer qu'un point M d'affixe z appartient à $\mathcal{D}$ si, et seulement si, l'angle $(\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{ME})$ est $\frac{\pi}{2}$.
b. En déduire que $M \in \mathcal{D}$ si, et seulement si, il existe $t > 0$ tel que $\varphi(z) = it$ où φ est l'homographie définie par $\varphi(z) = \frac{z+1}{z+2}$.
c. Donner l'homographie inverse de l'homographie φ de la question précédente.
d. En déduire que le demi-cercle $\mathcal{D}$ est paramétré par :

$$\mathcal{D} = \left\{ \frac{-1+2it}{1-it} \mid t \in]0; +\infty[\right\}.$$

e. Démontrer par le calcul que pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point de coordonnées $(-\frac{1+2t^2}{1+t^2}, \frac{t}{1+t^2})$ appartient au cercle de diamètre $[DE]$. Quel est l'unique point de ce cercle pour lequel il n'existe pas un tel paramètre t.

4. Itération d'une homographie.
On considère à nouveau l'homographie définie par $\varphi(z) = \frac{z+1}{z+2}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par récurrence par

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \varphi(u_n), \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a. Démontrer par récurrence sur n que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et monotone.
b. Démontrer que la suite converge vers $\lambda = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
Soit $z_0 \in H$ un nombre complexe de partie imaginaire strictement positive. On considère la suite définie par récurrence par $z_{n+1} = \varphi(z_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $\lambda' \neq \lambda$ l'autre nombre réel tel que $\varphi(\lambda') = \lambda'$.
c. Démontrer que pour tout $z \in H$, $\varphi(z) - \lambda = \frac{z-\lambda}{(z+2)(\lambda+2)}$.
d. En utilisant la question précédente, démontrer que la suite $(\frac{z_{n+1}-\lambda}{z_{n+1}-\lambda'})_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
e. Pour tout nombre complexe z, démontrer en utilisant l'inégalité triangulaire que si $|z-\lambda'| > 10$ alors $|\frac{z-\lambda}{z-\lambda'}| > \frac{1}{2}$.
f. En déduire que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers λ.