Faculté des sciences
Université d'Aix-Marseille

Préparation au Capes de mathématiques, master Meef, 1^{re} année

Corona-problème
jeudi 1^{er} juillet 2020

☐ Aix-Montperrin
☐ Luminy
☐ Saint-Charles
☒ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

À déposer sur Ametice

Enseignant : T. Coulbois

Les deux problèmes sont indépendants.

Exercice I. [D'après un sujet de baccalauréat de 1999].
Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit A le point d'affixe $-2+3i$ et B le point d'affixe $1-3i$. Soit M le point d'affixe z, $z \neq -2+3i$; à z on associe le nombre complexe z' tel que : $z' = \dfrac{z-1+3i}{z+2-3i}$

Cet exercice requiert une figure soignée qui est omise dans ce corrigé.

1. a. Établir une relation entre un argument de z' et l'angle orienté $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$.

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM}$ est $z+2-3i$ et celle de $\overrightarrow{BM}$ est $z-1+3i$. L'argument de z', qui est le rapport de ces deux affixes, est donc l'angle orienté $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$.

b. Déterminer et construire l'ensemble $(E1)$ des points M du plan tels que z' ait pour argument $\frac{\pi}{2}$

D'après la question précédente, un point M d'affixe z est tel que z' ait pour argument $\frac{\pi}{2}$ si, et seulement si, le triangle ABM est rectangle en B et orienté dans le sens direct donc si, et seulement si, M est sur le demi-cercle supérieur de diamètre $[AB]$. Attention, pour que le rapport z' existe il faut que $z-1+3i \neq 0$ donc que M soit différent de A. Pour que l'argument existe il faut que z' soit non-nul. L'ensemble $(E1)$ est donc le demi-cercle ouvert supérieur $\mathcal{C}_1$ de diamètre $[AB]$.

2. Déterminer et construire l'ensemble $(E2)$ des points M du plan tels que $|z'| = 2$.

Calculons :

$$2 = |z'| = \left|\frac{z-1+3i}{z+2-3i}\right| \iff 2|z+2-3i| = |z-1+3i| \iff 4|z+2-3i|^2 = |z-1+3i|^2$$

$$\iff 4(z+2-3i)(\overline{z+2-3i}) = (z-1+3i)(\overline{z-1+3i})$$

$$\iff 4z\bar{z} + 4(2+3i)z + 4(2-3i)\bar{z} + 52 = z\bar{z} + (-1-3i)z + (-1+3i)\bar{z} + 10$$

$$\iff 3z\bar{z} + (9+15i)z + (9-15i)\bar{z} + 42 = 0. \iff z\bar{z} + (3+5i)z + (3-5i)\bar{z} + 14 = 0$$

$$\iff (z+3-5i)(\bar{z}+3+5i) - 34 + 14 = 0 \iff |z+3-5i|^2 = 20 \iff |z+3-5i| = 2\sqrt{5}$$

L'ensemble $(E2)$ est donc le cercle $\mathcal{C}_2$ de centre $-3+5i$ et de rayon $2\sqrt{5}$. Nous vérifions que nous n'avons pas divisé par zéro dans le rapport z' : le point A n'est pas un point de $\mathcal{C}_2$.

3. Déterminer l'affixe du point commun K à $(E1)$ et $(E2)$.

D'après les définitions, le point K a pour affixe z qui correspond à z' d'argument $\frac{\pi}{2}$ et de module 2. Donc $z' = 2i$. Nous pouvons alors calculer :

$$2i = z' = \frac{z-1+3i}{z+2-3i} \iff 2i(z+2-3i) = z-1+3i \iff (1-2i)z = 7+i$$

$$\iff z = \frac{7+i}{1-2i} = \frac{(7+i)(1+2i)}{5} = 1+3i.$$

L'unique point commun de $(E1)$ et $(E2)$ est le point K d'affixe $1+3i$.

Problème

Dans ce problème les points du plan sont identifiés à leurs affixes.

Soit H le demi-plan complexe ouvert supérieur : $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

Dans ce problème, une homographie est une transformation de H définie par $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ où a, b, c, d sont des nombres réels et $ad - bc > 0$. On dit que la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est associée à l'homographie.

1. On considère l'homographie $\varphi : z \mapsto \frac{z+1}{z+2}$.

a. Placez dans le plan complexes les points $i-1$, $2i-2$, $i-3$, $-\frac{3}{2} + (1 + \frac{\sqrt{3}}{2})i$ et leurs images par φ.

Nous constatons que les quatre points proposés sont tous sur le cercle de centre $-1+i$ et de rayon 1. Nous calculons (en multipliant par la quantité conjuguée du dénominateur) :

$$\varphi(i-1) = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}, \quad \varphi(2i-2) = 1 + \frac{i}{2}, \quad \varphi(i-3) = \frac{3}{2} + \frac{i}{2}, \quad \varphi(\frac{3}{2} + (1 + \frac{\sqrt{3}}{2})i) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}.$$

Nous constatons que les images sont toutes sur la droite parallèle à l'axe des abscisses de partie imaginaire $\frac{1}{2}$.

b. Soit z un nombre complexe de partie réelle -2, déterminer la partie réelle de $\varphi(z)$.

Soit $y \in \mathbb{R}$ la partie imaginaire de z, si bien que $z = -2 + iy$. Calculons :

$$\varphi(z) = \frac{-2+iy+1}{-2+iy+2} = \frac{-1+iy}{iy} = 1 - \frac{i}{y} \text{ à condition que } y \neq 0.$$

Pour tout nombre complexe z de partie réelle -2 tel que $z \neq -2$, la partie réelle de $\varphi(z)$ est donc 1.

c. Soit x un nombre réel différent de -2. Soit z un point de H de partie réelle x et soit $z' = \varphi(z)$. On considère A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe $\frac{x+1}{x+2}$. Calculer l'angle $(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B})$ où M' est le point d'affixe z'. En déduire que l'image par φ de la demi-droite verticale de partie réelle x et de partie imaginaire strictement positive est le demi-cercle de diamètre $[AB]$ et de partie imaginaire strictement positive.

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{M'A}$ est $1-z' = 1-\frac{z+1}{z+2} = \frac{1}{z+2}$, alors que l'affixe du vecteur $\overrightarrow{M'B}$ est $\frac{x+1}{x+2} - z'$. Par hypothèse z est de la forme $z = x+iy$ où $y \in \mathbb{R}_+^*$. Nous pouvons donc calculer le rapport entre les affixes des deux vecteurs :

$$\frac{\frac{x+1}{x+2} - z'}{\frac{1}{z+2}} = \frac{x+1}{x+2}(x+2+iy) - z + 1 = x+1+iy\frac{x+1}{x+2} - (x+1+iy) = \frac{-iy}{x+2}.$$

Ce rapport est donc un imaginaire pur et l'angle $(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B})$ est droit. Comme $y > 0$, cet angle est $-\frac{\pi}{2}$ si $x > -2$ et $\frac{\pi}{2}$ si $x < -2$ (par hypothèse $x \neq -2$). Le point M' appartient donc à l'un des deux demi-cercles de diamètre $[AB]$. En discutant la position de A par rapport à B sur l'axe des abscisses

$$\frac{x+1}{x+2} < 1 \iff 0 < \frac{1}{x+2} \iff x > -2,$$

nous constatons que M' appartient toujours au demi-cercle supérieur de diamètre $[AB]$: celui de partie imaginaire strictement positive.
Nous avons donc démontré que l'image par φ de la demi-droite verticale de partie réelle x et de partie imaginaire strictement positive est incluse dans le demi-cercle de diamètre $[AB]$ et de partie imaginaire strictement positive.
Pour démontrer l'inclusion réciproque, nous partons d'un point M' d'affixe z' de ce demi-cercle. Nous traitons le cas où $x > -2$, l'autre cas étant similaire. Dans ce cas, A est avant B sur l'axe des abscisses et l'angle $(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B})$ est $-\frac{\pi}{2}$. Ainsi $\frac{\frac{x+1}{x+2}-z'}{1-z'}$ est un imaginaire pur strictement négatif. D'après le calcul précédent, considérons $y = i(x+2)\frac{\frac{x+1}{x+2}-z'}{1-z'}$ et donc y est un nombre réel strictement positif (car $x+2 > 0$). En posant $z = x+iy$, nous obtenons alors que

$$\varphi(z) = \frac{z+1}{z+2} = \frac{x+1+iy}{x+2+iy} = \frac{x+1-(x+2)\frac{\frac{x+1}{x+2}-z'}{1-z'}}{x+2-(x+2)\frac{\frac{x+1}{x+2}-z'}{1-z'}} = \frac{x+1-\frac{x+1-z'(x+2)}{1-z'}}{x+2-\frac{x+1-z'(x+2)}{1-z'}}$$

$$= \frac{(x+1)(1-z') - (x+1-z'(x+2))}{(x+2)(1-z') - (x+1-z'(x+2))} = z'.$$

Le point M' d'affixe z' est donc bien l'image par φ du point M d'affixe z. Pour tout point M' du demi-cercle supérieur de diamètre $[AB]$, nous avons trouvé un point M de la demi-droite supérieure verticale de partie réelle x tel que $\varphi(M) = M'$.
Nous avons ainsi démontré que l'image par φ de la demi-droite verticale de partie réelle x et de partie imaginaire strictement positive est exactement le demi-cercle de diamètre $[AB]$ et de partie imaginaire strictement positive.

2. Le groupe des homographies. Soit φ une homographie associée à une matrice A.

a. Démontrer que A est inversible.

Par hypothèse sur les homographies, en reprenant les notations de l'énoncé, le déterminant $ad - bc > 0$ est non-nul donc la matrice est inversible.

b. Soit $\lambda > 0$, démontrer que la matrice λA est aussi associée à φ.

pour tout nombre complexe z de partie imaginaire strictement positive en reprenant les notations de l'énoncé :

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\lambda}{\lambda}\frac{az+b}{cz+d} = \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d}.$$

La matrice λA est donc aussi associée à l'homographie φ.

c. Soit ψ une autre homographie associée à une matrice B. Démontrer que la composée $\varphi \circ \psi$ est associée à la matrice AB.

Reprenons les notations de l'énoncé : $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ et considérons l'homographie ψ définie par $\psi(z) = \frac{ez+f}{gz+h}$ où $e, f, g, h \in \mathbb{R}$ et $eh - fg > 0$. Composons alor sles deux homographies :

$$\varphi \circ \psi(z) = \varphi(\frac{ez+f}{gz+d}) = \frac{a\frac{ez+f}{gz+h} + b}{c\frac{ez+f}{gz+h} + d} = \frac{aez + af + bgz + bh}{cez + cf + dgz + dh} = \frac{(ae+bg)z + af + bh}{(ce+dg)z + cf + dh}.$$

L'homographie $\varphi \circ \psi$ est donc associée à la matrice

$$\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = A\,B.$$

d. Démontrer que toute homographie est une bijection de H.

Toute homographie est définie sur tout le demi-plan H. En effet le dénominateur ne peut s'annuler que pour z tel que $cz + d = 0$ et comme $(c, d) \neq (0, 0)$ (puisque le déterminant est non-nul), ce dénominateur ne s'annule qu'au plus en un unique nombre réel qui n'est pas dans H.
Pour un point M d'affixe $z = x + iy$ de H avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$, nous pouvons calculer la partie imaginaire de $\varphi(z)$:

$$\operatorname{Im}(\varphi(z)) = \operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{(ax+b+aiy)(cx+d-icy)}{|cz+d|^2}\right)$$

$$= \frac{(ad-bc)y}{|cz+d|^2} > 0 \text{ car } ad - bc > 0 \text{ et } y > 0.$$

Nous avons ainsi démontré que φ transforme tout point de H en un point de H. D'après la question précédente si φ est associée à une matrice A et ψ est l'homographie associée à la matrice A^{-1} (qui est aussi de déterminant strictement positif) alors $\varphi \circ \psi$ est l'homographie associée à la matrice identité, cette composée d'homographies est donc l'identité de H. De même $\psi \circ \varphi$ est l'identité de H.
Nous pouvons donc conclure que toute homographie φ est une bijection de H.

e. Démontrer que les homographies forment un groupe.

Nous avons démontré à la question 2.c. que la composée de deux homographies est une homographie, puis à la question 2.d que toute homographie est une bijection dont la bijection réciproque est aussi une homographie. Nous avons aussi évoqué à la question 2.d le fait que l'identité est une homographie (définie par $\varphi(z) = \frac{z+0}{0z+1}$ et donc associée à la matrice identité). Nous avons donc démontré le les homographies forment un groupe qui est un sous-groupe des bijections de H.

3. paramétrage d'un cercle.

Soit D le point d'affixe -2 et E celui d'affixe -1. On dénote par $\mathcal{D}$ le demi-cercle supérieur de diamètre $[DE]$.

a. Démontrer qu'un point M d'affixe z appartient à $\mathcal{D}$ si, et seulement si, l'angle $(\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{ME})$ est $\frac{\pi}{2}$.

Comme nous l'avons déjà vu aux questions précédentes, le triangle DEM est inscrit dans un cercle de diamètre $[DE]$ il est donc rectangle en M. Comme D est avant E sur l'axe réel et que M est dans le demi-plan supérieur le triangle DEM est orienté dans le sens direct et l'angle $(\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{ME})$ est donc $\frac{\pi}{2}$.

b. En déduire que $M \in \mathcal{D}$ si, et seulement si, il existe $t > 0$ tel que $\varphi(z) = it$ où φ est l'homographie définie par $\varphi(z) = \frac{z+1}{z+2}$.

L'angle $(\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{ME})$ est l'argument de $\frac{z_E - z}{z_d - z} = \frac{z+1}{z+2}\varphi(z)$. Donc $M \in \mathcal{D}$ si, et seulement si, $\varphi(z)$ est d'argument $\frac{\pi}{2}$ et donc, si et seulement si, il existe $t > 0$ tel que $\varphi(z) = it$.

c. Donner l'homographie inverse de l'homographie φ de la question précédente.

D'après la question 2.c, en inversant la matrice associée à φ nous obtenons que φ^{-1} est l'homographie définie par $\varphi^{-1}(z) = \frac{2z-1}{1-z}$.

d. En déduire que le demi-cercle $\mathcal{D}$ est paramétré par :

$$\mathcal{D} = \left\{ \frac{-1+2it}{1-it} \mid t \in]0;+\infty[\right\}.$$

D'après les questions précédentes, un point M d'affixe z appartient à $\mathcal{D}$, si, et seulement si, il existe $t > 0$ tel que $\varphi(z) = it$ et donc en utilisant la bijection réciproque, cette dernière égalité est équivalente à $\varphi^{-1}(it) = z$. Nous avons donc bien démontré que

$$M \in \mathcal{D} \iff \exists t > 0,\ z = \varphi^{-1}(it) = \frac{-1+2it}{1-it}.$$

Ce qui est bien la paramétrisation proposée.

e. Démontrer par le calcul que pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point de coordonnées $(-\frac{1+2t^2}{1+t^2}, \frac{t}{1+t^2})$ appartient au cercle de diamètre $[DE]$. Quel est l'unique point de ce cercle pour lequel il n'existe pas un tel paramètre t.

Remarquons d'abord que les coordonnées proposées, sont bien les parties réelles et imaginaires de $\varphi^{-1}(it)$ obtenues à la question précédente.
Pour tout nombre réel t, nous pouvons calculer la distance au milieu de $[DE]$:

$$\left(-\frac{1+2t^2}{1+t^2}+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{t}{1+t^2}\right)^2 = \frac{(1-t^2)^2}{4(1+t^2)^2}+\frac{t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1-2t^2+t^4+4t^2}{4(1+t^2)^2} = \frac{1+2t^2+t^4}{4(1+t^2)^2} = \frac{1}{4}.$$

Le point proposé appartient donc bien au cercle de diamètre $[DE]$.
Nous avons démontré à la question précédente qu'en prenant $t > 0$ nous obtenons exactement le demi-cercle supérieur de diamètre $[DE]$. En conjuguant pour $t < 0$ nous pourrions démontrer que nous obtenons exactement le demi-cercle ouvert inférieur. Pour $t = 0$ nous obtenons le point $(-1, 0)$ c'est-à-dire E. Le seul point du cercle qui n'est pas atteint est donc le point D (qui serait obtenu en posant $t = \infty$ qui n'est pas un nombre réel).
Nous reconnaissons les formules qui donnent cosinus et sinus en fonction de la tangente de l'angle moité (avec ajout de l'abscisse $-\frac{3}{2}$ du centre du cercle.

4. Itération d'une homographie.

On considère à nouveau l'homographie définie par $\varphi(z) = \frac{z+1}{z+2}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par récurrence par

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \varphi(u_n),\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a. Démontrer par récurrence sur n que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et monotone.

Commençons par une étude rapide de φ vue comme une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Sur $\mathbb{R}$ cette fonction est définie, continue et dérivable sauf en $x = -2$. Pour tout réel $x \neq -2$ $\varphi'(x) = \frac{1}{(x+2)^2} > 0$. Nous obtenons aussi les limites aux bornes du domaine de définition :

$$\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 1, \qquad \lim_{x \to -2, x<-2} \varphi(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \to -2, x>-2} \varphi(x) = -\infty$$

Nous pouvons donc tracer le tableau de variation de φ.
Démontrons par récurrence sur n que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive.
Initialisation : Pour $n = 0$, le terme u_0 est strictement positif par hypothèse.
Hérédité : Pour tout entier n, si u_n est positif alors $u_{n+1} = \frac{u_n+1}{u_n+2}$ est strictement positif.
Conclusion : par récurrence nous avons démontré que pour tout entier n, u_n est positif.
Comme φ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ (et même sur $]-2; +\infty[$), si pour un entier n, $u_n \leq u_{n+1}$ alors $u_{n+1} = \varphi(u_n) \leq \varphi(u_{n+1}) = u_{n+2}$. Ainsi nous pourrions démontrer par récurrence que si $u_0 \leq u_1$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et de même que si $u_0 \geq u_1$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Dans les deux cas nous démontrons que la suite est monotone.

b. Démontrer que la suite converge vers $\lambda = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Si la suite est décroissante alors elle est décroissante et minorée par 0 et donc convergente vers une limite $\lambda \geq 0$. Comme la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$ et que pour tout entier n, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$, en passant à la limite nous obtenons que $\lambda = \varphi(lmabda)$. Nous résolvons cette équation de degré 2 pour déterminer λ :

$$\lambda = \varphi(\lambda) \iff \lambda = \frac{\lambda+1}{\lambda+2} \iff \lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \iff \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Et comme $\lambda \geq 0$ nous avons démontré que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante alors elle converge vers $\lambda = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
En reprenant l'équation ci-dessus, nous pouvons aussi écrire que pour $x > 0$, $x < \varphi(x)$ si et seulement si x est entre les racines donc si $0 < x < \lambda$. Donc en reprenant la preuve de la question précédente la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante pour $u_0 > \lambda$ et strictement croissante pour $0 < u_0 < \lambda$. Dans ce dernier cas, en utilisant le tableau de variation, nous pourrions montrer par récurrence que pour tout entier n, $0 < u_n < \lambda$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée et donc convergente vers une limite qui appartient à $[0; \lambda]$ et par continuité de φ cette limite est forcément λ.
Dans tous les cas nous avons démontré que pour $u_0 > 0$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers λ.

Soit $z_0 \in H$ un nombre complexe de partie imaginaire strictement positive. On considère la suite définie par récurrence par $z_{n+1} = \varphi(z_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $\lambda' \neq \lambda$ l'autre nombre réel tel que $\varphi(\lambda') = \lambda'$.

c. Démontrer que pour tout $z \in H$, $\varphi(z) - \lambda = \frac{z-\lambda}{(z+2)(\lambda+2)}$.

Nous pouvons calculer rapidement pour tout nombre complexe $z \neq -2$:

$$\varphi(z) - \lambda = \frac{z+1}{z+2} - \frac{\lambda+1}{\lambda+2} = \frac{(z+1)(\lambda+2) - (\lambda+1)(z+2)}{(z+2)(\lambda+2)} = \frac{z-\lambda}{(z+2)(\lambda+2)}.$$

d. En utilisant la question précédente, démontrer que la suite $(\frac{z_{n+1}-\lambda}{z_{n+1}-\lambda'})_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

Comme φ est une bijection de H, nous pourrions démontrer que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bien définie de nombres complexes dans H, en particulier, pour tout $\mathbb{N}$, z_n est différent de -2, λ et λ' qui sont des nombres réels.
Le nombre λ' est aussi solution de $\varphi(\lambda') = \lambda$ donc l'égalité de la question précédente est aussi vraie. Pour tout entier n :

$$\frac{z_{n+1}-\lambda}{z_{n+1}-\lambda'} = \frac{\varphi(z_n)-\varphi(\lambda)}{\varphi(z_n)-\varphi(\lambda')} = \frac{\frac{z_n-\lambda}{(z_n+2)(\lambda+2)}}{\frac{z_n-\lambda'}{(z_n+2)(\lambda'+2)}} = \frac{\lambda'+2}{\lambda+2}\left(\frac{z_n-\lambda}{z_n-\lambda'}\right).$$

Ce qui démontre que la suite $(\frac{z_{n+1}-\lambda}{z_{n+1}-\lambda'})_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique est géométrique de raison $\frac{\lambda'+2}{\lambda+2}$.

e. Pour tout nombre complexe z, démontrer en utilisant l'inégalité triangulaire que si $|z-\lambda'| > 10$ alors $|\frac{z-\lambda}{z-\lambda'}| > \frac{1}{2}$.

En utilisant l'inégalité triangulaire pour tout nombre complexe $z \in H$, nous obtenons :

$$|z-\lambda'| \leq |z-\lambda| + |\lambda-\lambda'| \Rightarrow 1 \leq \left|\frac{z-\lambda}{z-\lambda'}\right| + \left|\frac{\lambda-\lambda'}{z-\lambda'}\right| \Rightarrow 1 \leq \left|\frac{z-\lambda}{z-\lambda'}\right| + \frac{3}{10}$$

car $\lambda-\lambda' = \sqrt{5} < 3$ et $z-\lambda' > 10$. En soustrayant nous obtenons bien que pour tout nombre complexe $z \in H$, si $|z-\lambda'| > 10$ alors $|\frac{z-\lambda}{z-\lambda'}| \geq \frac{7}{10} > \frac{1}{2}$.

f. En déduire que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers λ.

Quelque soit la valuer initiale $z_0 \in H$, la suite géométrique $(\frac{z_{n+1}-\lambda}{z_{n+1}-\lambda'})_{n\in\mathbb{N}}$ est de raison $\frac{\lambda'+2}{\lambda+2} = \frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{4}{(3+\sqrt{5})^2} = \frac{4}{14+6\sqrt{5}} < 1$ et converge donc vers 0. Il existe donc N tel que pour tout $n \geq N$, $|\frac{z_n-\lambda}{z_n-\lambda'}| < \frac{1}{2}$. D'après la question précédente, par contraposée, pour $n \geq N$ nous déduisons que $|z_n-\lambda'| \leq 10$ et donc que $|z_n-\lambda| \leq 10|\frac{z_n-\lambda}{z_n-\lambda'}|$. En utilisant le théorème d'encadrement des suites numériques (dit théorème des gendarmes) nous avons démontré que la suite $(|z_n-\lambda|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers λ.