INSPE d'Aix-Marseille-Université
M1 MEEF MATHS

Epreuve blanche du jeudi 6 février 2020
8h00-13h00

Téléphones et calculatrices interdits.
Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction dans l'évaluation des copies.

Problème 1

On se place dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

Questions préliminaires

1. On considère un vecteur $\vec{u}(a, b)$ de $\mathcal{P}$. Rappeler la définition de la translation $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$, et en donner une expression analytique dans le repère $\mathcal{R}$ (autrement dit exprimer les coordonnées (x', y') de l'image M' par $t_{\vec{u}}$ d'un point $M(x, y)$).
2. On considère un nombre réel non nul k et un point $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ de $\mathcal{P}$. Rappeler la définition de l'homothétie $h_{\Omega,k}$ de centre Ω et de rapport k, et en donner une expression analytique dans le repère $\mathcal{R}$.

Première partie

1. On considère le point $A(2, 0)$, et on désigne par λ un nombre réel. A tout point M de $\mathcal{P}$ on fait correspondre le point M' barycentre des points pondérés $(O, \frac{1}{2})$, $(A, \frac{1}{2} - \lambda)$ et (M, λ).
   Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OM'}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM}$. En déduire les coordonnées (x', y') de M' en fonction des coordonnées (x, y) de M.
2. On note f_λ l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à un point M associe le point $f_\lambda(M) = M'$ défini dans la question précédente.
   (a) Montrer qu'il existe un nombre réel λ_0 tel que f_λ est une bijection de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ si et seulement si $\lambda \neq \lambda_0$.
   Préciser la nature de l'application f_{λ_0}.
   (b) Etudier les points fixes de f_λ.
   (c) Trouver la nature de f_λ lorsque $\lambda \neq \lambda_0$ et en donner les éléments déterminants.
3. On note $\mathcal{F} = \{f_\lambda \; ; \; \lambda \in \mathbb{R}, \; \lambda \neq \lambda_0\}$. Montrer que si λ et λ' sont deux nombres réels distincts et différents de λ_0, l'application $f_\lambda \circ f_{\lambda'}$ n'appartient pas à $\mathcal{F}$.

4. On fixe un point M du plan, M distinct de A, et on considère l'application g_M de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{P}$ qui à λ associe $M' = f_\lambda(M)$.
   (a) Montrer que l'ensemble des points $M' = g_M(\lambda)$ obtenus lorsque λ décrit $\mathbb{R}$ est une droite $\mathcal{D}_M$.
   (b) Soit g_M^* l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{D}_M$ qui à un nombre réel λ associe le point $g_M(\lambda)$. L'application g_M^* est-elle bijective ?
5. On considère maintenant l'application d de $\mathcal{P}$ dans l'ensemble E des droites de $\mathcal{P}$, qui à M associe la droite $\mathcal{D}_M$ définie dans la question précédente.
   (a) L'application d est-elle injective ?
   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante à laquelle doit satisfaire une droite $\mathcal{D}$ du plan pour qu'elle soit l'image d'un point M par l'application d.

Deuxième partie *Cette partie peut être traitée indépendamment du reste du problème.*

A tout nombre réel λ on associe le point M_λ de coordonnées (λ, λ), puis le point M'_λ défini comme dans la première question : le point M'_λ est le barycentre des points pondérés $(O, \frac{1}{2})$, $(A, \frac{1}{2} - \lambda)$ et (M_λ, λ). On appelle h l'application qui à tout nombre réel λ associe de cette manière le point $h(\lambda) = M'_\lambda$.

1. Exprimer les coordonnées (x_λ, y_λ) de $h(\lambda)$ en fonction de λ.
2. Montrer que lorsque λ décrit $\mathbb{R}$, l'ensemble des points $h(\lambda)$ est inclus dans la courbe (Γ) d'équation cartésienne
$$(x - y - 1)^2 - 4y = 0 \ .$$
3. Reconnaître la nature de la courbe (Γ) en en déterminant une équation dans le repère $\mathcal{R}' = (O, \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j}), \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{j} - \vec{i}))$. On précisera les points d'intérêt particulier et axes de symétrie éventuels de (Γ).
4. Préciser les coordonnées de $h(\lambda)$ dans ce nouveau repère.
5. Déterminer des équations cartésiennes de la tangente à (Γ) au point $h(\lambda)$ dans le repère $\mathcal{R}'$, puis dans le repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.
6. Déterminer des équations des tangentes à (Γ) aux points de (Γ) situés sur les axes du repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.
7. Construire (Γ) et préciser l'ensemble des points $h(\lambda)$ lorsque λ décrit $\mathbb{R}$. On indiquera quelques points $h(\lambda)$ sur la figure, dont ceux correspondant à $\lambda = -2,\ -1,\ 0,\ +1,\ +2$, ainsi que les tangentes en ces points.

M1 MEEF MATHS
Epreuve blanche du jeudi 6 février 2020 : corrigé

Problème 1

Questions préliminaires

1. La translation $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$ est l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à un point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. Comme on a $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MM'}$, il vient $\begin{cases} x' &= & x+a \\ y' &= & y+b \end{cases}$.
2. L'homothétie $h_{\Omega,k}$ de centre Ω et de rapport k est l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à un point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$. Comme on a $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M'}$, il vient $\begin{cases} x' &= & k(x-x_\Omega)+x_\Omega &= & kx+(1-k)x_\Omega \\ y' &= & k(y-y_\Omega)+y_\Omega &= & ky+(1-k)y_\Omega \end{cases}$.

Première partie

1. Remarquons que le barycentre considéré est bien défini (somme des poids égale à $1 \neq 0$). On a donc $\overrightarrow{0M'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{00} + (\frac{1}{2} - \lambda)\overrightarrow{0A} + \lambda\overrightarrow{OM}$, d'où l'on déduit $\begin{cases} x' &= \lambda x &+ & (1-2\lambda) \\ y' &= \lambda y \end{cases}$.
2. (a) Etant donné un point M' de $\mathcal{P}$ et un nombre réel λ, cherchons les antécédents de M' par f_λ, autrement dit résolvons l'équation $f_\lambda(M) = M'$ d'inconnue M. Ceci équivaut à résoudre le système $\begin{cases} x' &= \lambda x &+ & (1-2\lambda) \\ y' &= \lambda y \end{cases}$ d'inconnue (x, y).
   - Ou bien $\lambda \neq 0$, ce système admet comme unique solution $(x, y) = (\frac{1}{\lambda}(x'+2\lambda-1), \frac{1}{\lambda}y')$, et f_λ est bijective ;
   - ou bien $\lambda = 0$, et il vient $x' = 2$ et $y' = 0$. Ainsi, f_0 est constante égale à A, et n'est ni injective ni surjective (autrement dit, $\lambda_0 = 0$).

   (b) Etudions les points fixes de f_λ, c'est-à-dire résolvons le système $\begin{cases} x &= \lambda x &+ & (1-2\lambda) \\ y &= \lambda y \end{cases}$,
   soit $\begin{cases} (1-\lambda)x &= & (1-2\lambda) \\ (1-\lambda)y &= & 0 \end{cases}$.
   - Ou bien $\lambda \neq 1$ et la résolution de ce système conduit au seul point fixe $\Omega_\lambda(\frac{1-2\lambda}{1-\lambda}, 0)$;
   - ou bien $\lambda = 1$ et f_1 n'admet pas de point fixe.

   (c) Si $\lambda \neq 0$, par les questions préliminaires :
   - ou bien $\lambda \neq 1$ et f_λ est l'homothétie de centre $\Omega_\lambda(\frac{1-2\lambda}{1-\lambda}, 0)$ et de rapport λ,
   - ou bien $\lambda = 1$ et f_1 est la translation de vecteur $\vec{u}(-1, 0)$.
3. Soit λ et λ' deux nombres réels distincts et non nuls. Pour un point $M(x, y)$ on a alors, en posant $f_\lambda \circ f_{\lambda'}(M) = M"$ et $M"(x", y")$:
   $\begin{cases} x" &= \lambda\lambda' x &+ & (1-2\lambda\lambda'-\lambda) \\ y" &= \lambda\lambda' y \end{cases}$, dont on constate que ce n'est pas l'expression attendue d'un élément de $\mathcal{F}$ car $\lambda\lambda' \neq 0$ (il faudrait avoir $x" = \lambda\lambda' x + (1-2\lambda\lambda')$).

4. (a) Notons (x_M, y_M) les coordonnées de M. L'application g_M associe à λ le point $f_\lambda(M)$ de coordonnées $((x_M-2)\lambda+1, y_M\lambda)$. Comme $M \neq A$, lorsque λ parcourt $\mathbb{R}$ on reconnaît une équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}_M$ dirigée par $\overrightarrow{V_M}(x_M-2, y_M)$ (vecteur qui est bien $\neq \vec{0}$ car $M \neq A$) et contenant le point $I(1,0)$.

   (b) Lorsque λ parcourt $\mathbb{R}$, le point $g_M^*(\lambda)$ parcourt bi-univoquement la droite $\mathcal{D}_M$; en effet, on a $\overrightarrow{Ig_M^*(\lambda)} = \lambda\overrightarrow{V_M}$. Autrement dit, g_M^* est bijective.

5. (a) Les droites $\mathcal{D}_M$ passant toutes par le point I, elles sont déterminées par leur direction, qui est la droite vectorielle générée par $\overrightarrow{V_M}$. Or en prenant pour M le point $M_1(3,1)$ on obtient $\overrightarrow{V_{M_1}}(1,1)$, et en prenant pour M le point $M_2(4,2)$ on obtient $\overrightarrow{V_{M_2}}(2,2)$ qui est colinéaire à $\overrightarrow{V_{M_1}}$. On en déduit que $\mathcal{D}_{M_1} = \mathcal{D}_{M_2}$, c'est-à-dire $d(M_1) = d(M_2)$, et d n'est pas injective.

   (b) On a vu que toutes les droites $\mathcal{D}_M$ passent par I. Inversement, si $\mathcal{D}$ est une droite passant par I, et dirigée par un vecteur non nul $\vec{V}(\alpha, \beta)$, en posant $M(\alpha+2, \beta)$, on a $\vec{V} = \overrightarrow{V_M}$, ce qui montre que $\mathcal{D} = d(M)$. Ainsi une droite $\mathcal{D}$ du plan est l'image d'un point M par d si et seulement si $I \in \mathcal{D}$.

Deuxième partie

1. Par la première partie, question 1, on a immédiatement $(x_\lambda, y_\lambda) = ((\lambda-1)^2, \lambda^2)$.
2. Du calcul précédent il vient $x_\lambda = \lambda^2+1-2\lambda = y_\lambda+1-2\lambda$, d'où $(x_\lambda-y_\lambda-1)^2 = (-2\lambda)^2 = 4y_\lambda$. Ainsi tout point $h(\lambda)$ appartient à la courbe (Γ) d'équation cartésienne
$$(x-y-1)^2 - 4y = 0 \ .$$
3. Soit $M(x,y)_\mathcal{R}$; notons (X,Y) les coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}'$.
On a par contravariance :
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \ .$$
En reportant ceci dans l'équation $(x-y-1)^2 - 4y = 0$ de Γ, il vient après simplification $Y^2 = \sqrt{2}X - \frac{1}{2}$, autrement dit
$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}Y^2 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ .$$
Ainsi, Γ est une parabole d'axe la première bissectrice (relativement au repère $\mathcal{R}$) et de sommet $S(\frac{1}{2\sqrt{2}}, 0)_{\mathcal{R}'}$, soit $S(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})_\mathcal{R}$.
4. De $h(\lambda)((\lambda-1)^2, \lambda^2)_\mathcal{R}$ et
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & +\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
il vient $h(\frac{1}{\sqrt{2}}(2\lambda^2-2\lambda+1), \frac{1}{\sqrt{2}}(2\lambda-1))_{\mathcal{R}'}$.

5. Dans le repère $\mathcal{R}'$, on dispose d'une équation de Γ de la forme $X = f(Y)$, où f est dérivable. Donc

$$X - f(Y_0) = f'(Y_0)(Y - Y_0) ,$$

où $f(Y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y^2 + \frac{1}{2})$ et $f'(Y) = \sqrt{2}Y$,
est une équation de la tangente à la courbe Γ, représentative de f, au point d'ordonnée Y_0.
Ceci conduit, pour $Y_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(2\lambda - 1)$, $X_0 = f(Y_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(2\lambda^2 - 2\lambda + 1)$ (déjà vus plus haut) et $f'(Y_0) = (2\lambda - 1)$, à l'équation

$$X - \frac{1}{\sqrt{2}}(2\lambda^2 - 2\lambda + 1) = (2\lambda - 1)(Y - \frac{1}{\sqrt{2}}(2\lambda - 1)) ,$$

soit en revenant au repère $\mathcal{R}$, tous calculs faits,

$$(1 - \lambda)y = -\lambda x + \lambda(1 - \lambda) .$$

6. Les axes du repère $\mathcal{R}$ sont les droites d'équations $x = 0$ et $y = 0$, valeurs qui donnent dans $(x - y - 1)^2 - 4y = 0$ les points $I(1, 0)_{\mathcal{R}}$ et $J(0, 1)_{\mathcal{R}}$. Remarquons que $I = h(0)$ et $J = h(1)$, si bien que le résultat précédent donne en I une tangente d'équation (y=0) (horizontale) et en J une tangente d'équation ($x = 0$) (verticale).
7. Lorsque λ décrit $\mathbb{R}$, l'ordonnée $\frac{1}{\sqrt{2}}(2\lambda - 1)$ de $h(\lambda)$ dans le repère $\mathcal{R}'$ décrit $\mathbb{R}$ tout entier. Ceci montre que l'ensemble des points $h(\lambda)$ est égal à la courbe (Γ) toute entière (on a une "paramétrisation" de (Γ)).
   Les point précisés dans l'énoncé sont déterminés comme suit dans le repère $\mathbb{R}$:
   - $\lambda = -2$, $h(-2)(9, 4)$, tangente en $h(-2)$ de pente $\frac{2}{3}$,
   - $\lambda = -1$, $h(-1)(4, 1)$, tangente en $h(-1)$ de pente $\frac{1}{2}$,
   - $\lambda = 0$, $h(0)(1, 0)$, tangente en $h(0)$ horizontale,
   - $\lambda = +1$, $h(+1)(0, 1)$, tangente en $h(+1)$ verticale,
   - $\lambda = +2$, $h(+2)(1, 4)$, tangente en $h(+2)$ de pente 2,

   et rappelons que le sommet de Γ est $S(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, où on a (pas de calcul à faire !) une tangente parallèle à la deuxième bissectrice.

--{ $(t\text{-}1)^2$, t^2 }--