Complément d'algèbre bilinéaire

M1-Meef-math : préparation au Capes de mathématiques
Université d'Aix-Marseille
Thierry Coulbois
19 mars 2020 à 18:20:58

Ces notes de cours sont destinées à combler les lacunes restant dans nos cours d'algèbre en vue de la préparation du Capes *de mathématiques. Elles essayent de constituer un substitut aux cours qui auraient dû avoir lieu la semaine du 15 mars 2020 et qui ont été annulés par les corona-vacances.*

Je ne suis pas du tout convaincu de la pertinence de ces notes. En particulier, de nombreux livres ou ressources en ligne (en particulier wikipedia) ont été écrits par des gens plus rompus à cet exercice, avec plus de temps, ou plus de moyen de mise en page. Je vous remercie de me signaler les erreurs diverses.

1 Introduction

Nous avons déjà étudié le produit scalaire en géométrie et j'espère que vous êtes à l'aise avec cet outil et convaincu-es de sa pertinence.

Comme dans les autres domaines des mathématiques, après avoir travaillé pendant deux millénaires la géométrie, avoir bien assimilé le théorème de Pythagore, la manipulation des angles et la trigonométrie, le théorème d'Al-Kashi, les mathématiques ont isolé les propriétés exactement nécessaire à faire de la géométrie. Et ces propriétés ont été utilisée comme définition de ce qu'est une géométrie.

Vous avez déjà étudié ce qu'est un espace vectoriel. C'est le cadre algébrique, autrement dit abstrait et calculatoire, exactement nécessaire pour travailler sur l'alignement, le parallélisme, le théorème de Thalès.

Nous y ajoutons maintenant de quoi mesurer les distances et les angles. La notion clé retenue au fil des siècles par les mathématiques est celle de produit scalaire.

Définition 1. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Une **forme bilinéaire** φ est une application du produit cartésien $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire que pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, elle renvoie un nombre $\varphi(u, v)$) linéaire à gauche :*

$$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \varphi(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \vec{w}) = \lambda\varphi(\vec{u}, \vec{w}) + \mu\varphi(\vec{v}, \vec{w}),$$

et linéaire à droite

$$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \varphi(\vec{u}, \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda\varphi(\vec{u}, \vec{v}) + \mu\varphi(\vec{u}, \vec{w}).$$

*Une forme bilinéaire est **symétrique** si de plus elle vérifie :*

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in E,\ \varphi(\vec{u}, \vec{v}) = \varphi(\vec{v}, \vec{u}).$$

Les définitions ci-dessus expriment rigoureusement que les règles usuelles du calcul (distributivité et commutativité) s'applique à φ une fois que nous utiliserons une notation multiplicative $\vec{u} \cdot \vec{v}$ au lieu de $\varphi(\vec{u}, \vec{v})$. Vous avez l'habitude de ces propriétés du calcul.

Attention cependant, ces calculs sont hétérogènes : ils manipulent des objets de différentes natures : nombres aussi appelés scalaire et vecteurs. Vous devez systématiquement être conscient de l'opération que vous utilisez et vérifier que ce que vous faites est « permis ».

Exercice I. **1.** Vérifiez que vous êtes capable d'écrire la définition d'un espace vectoriel, celle d'un corps. Vérifiez que vous savez énoncer les règles usuelles du calcul : associativité, commutativité, distributivité, linéarité.
2. Le produit scalaire est-il associatif ?

Comme vous le savez le produit scalaire est utilisé pour définir la distance et la distance est un nombre positif. Nous ajoutons donc deux propriétés :

Définition 2. *Une forme bilinéaire symétrique φ sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est* ***positive*** *si pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\varphi(\vec{u},\vec{v}) \geq 0$. Elle est de plus* ***définie*** *si pour tout vecteur $\varphi(\vec{u},\vec{u}) = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$.*

Un ***produit scalaire*** *est une forme bilinéaire symétrique positive définie.*

Un ***espace vectoriel euclidien*** *est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension fini muni d'un produit scalaire.*

Notation. Le produit scalaire est tellement utilisé dans les calculs et les preuves qu'on lui donne une notation la plus simple possible. On écrit souvent $\vec{u}\cdot\vec{v}$ au lieu de $\varphi(\vec{u},\vec{v})$. Comme remarqué plus haut, avec une telle notation multiplicative, les propriétés de bilinéarité et de symétrie deviennent très naturelles : ce sont les mêmes que celles du produit chez les nombres.

On rencontre aussi les notation $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$ ou $(\vec{u}|\vec{v})$ et quelques variantes. Vous devez vous conformer aux notations proposées par l'énoncé. Devant vos futur-es élèves choisissez des notations simples et lisibles en cohérence avec les programmes, vos collègues, les ressources que vous utilisez avec les élèves (livres et autres supports).

Exercice II. Dans l'équivalence utilisée pour la définition, une des implications est vraie pour toutes les formes bilinéaires : démontrez, en utilisant les propriétés usuelles du calcul, c'est-à-dire la bilinéarité, que pour toute forme bilinéaire et tout vecteur $\vec{u}$: $\varphi(\vec{u},\vec{0}) = \varphi(\vec{0},\vec{u}) = \varphi(\vec{0},\vec{0})$.

Voilà, depuis un siècle, c'est tout ce dont on a besoin pour faire de la géométrie ! 2000 ans de travail mathématique réduit à deux petites définitions et un formalisme qui vous est assez familier.

Il y a assez peu d'exemples d'espaces vectoriels abstraits et a fortiori de produits scalaires abstraits. Pour s'approprier les propriétés utilisées ci-dessus on peut proposer les exemples ci-dessous.

Exercice III. Soit E l'espace des fonctions continues de $[0;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
1. Rappeler que c'est un espace vectoriel.
2. Démontrer que $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$ pour deux fonctions $f,g \in E$ défini un produit scalaire.

Exercice IV. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes réels de degré inférieur ou égal à deux. Pour $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ on définit $\langle P, Q\rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$. Vérifier que cela fait de E un espace euclidien.

2 Inégalité de Cauchy-Schwarz et norme

Des définitions algébriques de la section précédente nous déduisons (par le calcul) l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ qui sera la base de notre définition de la norme, de la trigonométrie, etc.

Définition 3. *Dans un espace vectoriel muni d'un produit scalaire (noté ici $\cdot$), la* ***norme*** *d'un vecteur $\vec{u}$ est $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$.*

Nous remarquons que la propriété de positivité implique que le nombre sous la racine carrée est bien positif et la norme d'un vecteur est un nombre réel positif.

Théorème 4. ***Inégalité de* Cauchy-Schwarz.** *Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel et φ un produit scalaire sur E. Alors pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:*

$$|\varphi(u, v)| \leq \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|$$

Démonstration. La preuve de cette inégalité fondamentale repose sur un joli truc de calcul.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Quelque soit un nombre réel λ, par hypothèse, φ est une forme positive donc $\varphi(\lambda\vec{u}+\vec{v}, \lambda\vec{u}+\vec{v}) \geq 0$. En utilisant la bilinéarité et la symétrie, nous développons le terme de gauche et nous obtenons

$$\lambda^2\varphi(\vec{u}, \vec{u}) + 2\lambda\varphi(\vec{u}, \vec{v}) + \varphi(\vec{v}, \vec{v}) \geq 0.$$

Puisque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs fixés, nous reconnaissons un polynôme de degré inférieur ou égal à deux en λ, c'est-à-dire une inégalité de la forme

$$a\lambda^2 + 2b'\lambda + c \geq 0$$

où $a = \|u\|^2$, $b' = \varphi(\vec{u}, \vec{v})$ et $c = \|\vec{v}\|^2$.

Nous connaissons bien les polynômes de degré inférieur ou égal à deux. S'il y a deux racines distincts le signe du polynôme entre les racines sera différents de celui à l'extérieur des racines. Cela contredirait le fait que ce polynôme est toujours positif.

Pour que ce polynôme soit toujours positif, il faut donc qu'il y ait une racine double ou pas de racines du tout. C'est-à-dire il faut que le discriminant (réduit) $\Delta' = b'^2 - ac$ soit négatif :

$$(\varphi(\vec{u}, \vec{v}))^2 - \|u\|^2 \, \|v\|^2 \leq 0.$$

(Il y a aussi le cas où ce n'est pas un polynôme de degré deux, c'est-à-dire lorsque $\|\vec{u}\| = 0$. Dans ce cas il faut aussi que le coefficient du terme de degré 1 soit nul : $\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = 0$. Et finalement, dans ce cas dégénéré l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ est vraie. Alternativement la négativité du discriminant recouvre aussi ce cas.)

Cette inégalité est exactement l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ une fois utilisé la croissance de la fonction racine carrée :

$$(\varphi(\vec{u}, \vec{v}))^2 \leq \|u\|^2 \, \|v\|^2 \iff |\varphi(\vec{u}, \vec{v})| \leq \|u\| \, \|v\|.$$

(Attention à l'appartion de la valeur absolue : nous ne connaissons pas le signe de $\varphi(\vec{u}, \vec{v})$ et pour tout nombre réel x, $\sqrt{x^2} = |x|$.) $\square$

Les grands mathématiciens L. CAUCHY et H. SCHWARZ sont célèbres parce que cette inégalité s'applique dans de nombreux contextes pas du tout évident. Citons par exemple le cas de l'intégrale évoqué à l'exercice III :

Corollaire 5. *Soit f et g deux fonctions continues sur $[0;1]$ à valeurs réels. Alors*

$$\left|\int_0^1 f(t)g(t)\,dt\right| \leq \sqrt{\int_0^1 f(t)^2\,dt}\sqrt{\int_0^1 g(t)^2\,dt}.$$

E est désormais un espace vectoriel muni d'un produit scalaire que nous notons de manière standard : $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

La norme définie avant la propriété de CAUCHY-SCHWARZ vérifie bien les axiomes d'une norme que nous rappelons :

Propriété 6. $\|\cdot\|$ *est une application de E dans $\mathbb{R}^+$.*

Pour tous vecteurs $\vec{u},\vec{v}\in E$, pour tout nombre $\lambda\in\mathbb{R}$:

1. $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda|\,\|\vec{u}\|$;
2. $\|\vec{u}\| = 0$ *si, et seulement si,* $\vec{u} = \vec{0}$;
3. $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

*Cette troisième propriété est l'**inégalité triangulaire**.*

Démonstration. Nous démontrons cette troisième propriété (c'est une démonstration que vous devez savoir faire de manière fluide).

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, calculons :

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) \quad \text{c'est la définition de la norme}$$

$$= \vec{u}\cdot\vec{u} + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{v} \quad \text{par bilinéarité et symétrie du produit scalaire}$$

$$= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \quad \text{à nouveau c'est la définition de la norme}$$

$$\leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 \quad \text{par l'inégalité de Cauchy-Schwarz}$$

$$= (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2 \quad \text{nous reconnaissons l'identité remarquable}$$

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et la norme est positive donc l'inégalité ci-dessus implique l'inégalité triangulaire. □

Nous pouvons étudier les cas d'égalité.

Proposition 7. *Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.*

Cas d'égalité de l'inégalité triangulaire : $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ si, et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.

Cas d'égalité de l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ *: $\|\vec{u}\cdot\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$ si, et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.*

Démonstration. Dans la preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz si le discriminant est nul, alors le polynôme de degré deux admet une racine $\lambda_0 \in \mathbb{R}$: $\varphi(\lambda_0\vec{u}+\vec{v}, \lambda_0\vec{u}+\vec{v}) = 0$. Comme le produit scalaire φ est défini, nous en déduisons que $\lambda_0\vec{u}+\vec{v} = \vec{0}$ et donc que les vecteurs sont colinéaires.

Attention, il ne faut pas oublier le cas dégénéré où le polynôme n'est pas de degré deux. Mais dans ce cas $\vec{u} = \vec{0}$ et les deux vecteurs sont bien colinéaires.

Nous avons donc démontré que dans le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Réciproqement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, par symétrie, nous pouvons supposer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$. Dans ce cas un calcul rapide nous permet de conclure :

$$|\varphi(\vec{u},\vec{v})| = |\varphi(\vec{u},\lambda\vec{u})| = |\lambda|\varphi(\vec{u},\vec{u}) = |\lambda|\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{u}\|(|\lambda|\|\vec{u}\|) = \|\vec{u}\|\|\lambda\vec{u}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|.$$

Dans la preuve de l'inégalité triangulaire, nous voyons que le cas d'égalité implique le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz et plus précisément que $\varphi(\vec{u},\vec{v}) = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$. La preuve précédente implique alors que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Par symétrie supposons qu'il existe λ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$. Calculons alors :

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}+\lambda\vec{u}\| = \|(1+\lambda)u\| = |1+\lambda|\,\|u\|.$$

Si $\lambda \geq 0$ alors

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| = (1+\lambda)\,\|\vec{u}\| = \|\vec{u}\| + \lambda\|\vec{u}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$$

Si au contraire $\lambda < 0$ (et $\vec{u} \neq \vec{0}$) nous obtenons

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| = |1+\lambda|\,\|\vec{u}\| < (1+|\lambda|)\,\|u\| = \|\vec{u}\| + |\lambda|\|\vec{u}\| = \|\vec{u}\| + \|\lambda\vec{u}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$$

Ce qui termine la preuve du cas d'égalité de l'inégalité triangulaire. □

3 Orthogonalité, angles

Maintenant que nous avons le cadre, nous utilisons notre définition pour coller avec la géométrie usuelle. Nous définissons donc les notions que vous croyiez connaître (distance, orthogonalité, angle) à partir de notre formalisme.

Nous disposons désormais d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E muni d'un produit scalaire (avec la notation usuelle $\vec{u} \cdot \vec{v}$).

Définition 8. *Deux vecteurs sont* ***orthogonaux*** *si leur produit scalaire est nul.*

Cette définition est très importante. Aucun-e étudiant-e préparant le Capes *ne doit hésiter entre produit scalaire et déterminant (ou produit en croix) pour tester l'orthogonalité. Vous allez devoir enseigner cela à vos élèves de 1re. Vous devrez bien leur faire comprendre ce lien entre orthogonalité et produit scalaire.*

Avec des définitions de la norme et de l'orthogonalité le théorème de Pythagore est immédiat, il devient presque une simple remarque de calcul :

Théorème 9 (Pythagore)**.** *Dans un triangle ABC rectangle en A, $BC^2 = AB^2 + AC^2$.*

Réciproque si un triangle ABC vérifie l'égalité $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors il est rectangle en A.

Avant de faire cette preuve il faut noter le glissement depuis la géométrie vectorielle vers la géométrie affine. Il faut bien avoir en tête le formalisme : la distance entre deux points A et B est *par définition* la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$: $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$. Pour mémoire, un espace affine $\mathcal{E}$ est un ensemble avec une application de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ dans un espace vectoriel E qui à deux points A et B associe un vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Démonstration. Nous calculons en utilisant la définition de la norme, la relation de CHASLES et la bilinéarité du produit scalaire :

$$BC^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}$$

Le théorème de PYTHAGORE et sa réciproque découlent donc précisément de la définition de l'orthogonalité : ABC est rectangle en A si, et seulement si, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. □

Il est très décevant qu'un des plus gros théorème du collège, un élément clé des mathématiques depuis 2500 ans, peut-être un des grands jalons de la pensée humaine (c'est un pas très important vers la notion de géométrie, de raisonnement abstrait, de preuve, etc.) se résume à une petite démonstration de trois lignes. Cela illustre le fait que les mathématiques sont une science cumulative : toutes les mathématiques que vous avez apprises depuis votre 4e vous ont fait progresser. Vous avez maintenant tellement assimilé ces savoirs précédents, qu'ils vous semblent maintenant être complètement naturels et faciles.

Plus subtile, parce qu'elle demande des discussions précises et ouvre à plusieurs notion, est la question des angles.

Définition 10. *Étant donné deux vecteurs non-nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le cosinus de l'angle $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ est :*

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}$$

Attention aussi à cette définition, elle définit le cosinus d'un angle, alors que nous n'avons jamais donné la définition d'un angle. Que serait un angle pour vous ? La question n'est pas celle de la nature profonde de cet objet, mais celle de son utilisation, des règles de son utilisation.

De même que les mathématiques modernes évacuent la question de la nature des droites, des points, des nombres et remplace tout cela par des règles solides d'utilisation. Donc que doit-on pouvoir faire avec un angle ? Calculer son cosinus et son sinus sûrement (c'est ce qui est utile pour l'aire, la hauteur, etc.), pouvoir les comparer (un angle est-il égal à un autre, est-il plus grand qu'un autre). On commence donc par ça par dire quand deux angles sont égaux. Un angle peut-être décrit par un couple de vecteurs unitaires $(\vec{u}, \vec{v})$, et deux couples de vecteurs non-nuls définissent le même angle si on peut passer de l'un à l'autre par une isométrie directe. Formellement on vient de définir une relation d'équivalence. Techniquement on veut souvent décrire un angle avec un couple de vecteurs non-nuls (et pas forcément unitaires), du coup la relation d'équivalence est encore un peu plus difficile.

Après avoir défini ce qu'est un angle, il faut définir sa mesure. Les propriétés de cette mesure est de satisfaire la relation de CHASLES pour les angles. Tout cela est difficile. Malheureusement, l'usage ne propose pas de notations différentes pour un couple de vecteurs, sa classe d'équivalence en tant qu'angle, sa mesure (modulo 2π). Il vaut donc mieux s'en tenir au cosinus des angles.

Revenons plus directement à votre cours. La définition ci-dessus n'est possible que grâce à l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ : le nombre que nous avons calculé comme étant le cosinus est bien compris entre -1 et 1.

Nous obtenons alors la propriété que vous enseignerez au lycée et qui découle directement de la définition ci-dessus.

Proposition 11. *Pour deux vecteurs non-nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$:*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

□

Nous pouvons aussi en déduire

Théorème 12 (AL-KASHI)**.** *Dans tout triangle ABC :*

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB.AC \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}).$$

Ce théorème se démontre exactement comme le théorème de PYTHAGORE. Voici à nouveau un grand théorème de l'histoire des mathématiques ramené à un énoncé évident dans notre contexte.

Nous avons choisi de définir la norme à partir du produit scalaire. C'est une approche moderner, pratique et efficace. Les propriétés d'un produit scalaire sont en effet plus faciles à énoncer que celles de la norme associée. Néanmoins, on peut tout à fait partir de la norme (à condition qu'elle soit euclidienne) et défnir ensuite le produit scalaire :

Proposition 13. *Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right).$$

La preuve se fait simplement en revenant à la définition de la norme et en utilisant la bilinéarité du produit scalaire.

4 Bases orthonormées, coordonnées et produit scalaire

Bien sûr après ces définitions abstraites, nous savons depuis R. DESCARTES que toute la géométrie peut se faire en coordonnées.

Une base est **orthonormée** si elle est constituée de vecteurs **unitaires** (c'est-à-dire de norme 1) deux à deux orthogonaux.

Par rapport à une base orthonormée l'expression du produit scalaire est l'autre grande notion que vous devrez enseigner à vos élèves de 1^{re} (du moins en dimensions deux et trois).

Proposition 14. *Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base orthonormée d'un espace vectoriel euclidien E. Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ respectivement le produit scalaire est :*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Démonstration. La preuve demande de savoir écrire la définition des coordonnées d'un vecteur par rapport à une base

$$\vec{u} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n \text{ et } \vec{v} = y_1\vec{e}_1 + \cdots + y_n\vec{e}_n,$$

et d'utiliser la bilinéarité, la définition de l'orthogonalité

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n) \cdot (y_1\vec{e}_1 + \cdots + y_n\vec{e}_n) = \sum_{i=1,j=1}^{n} x_i y_j \, \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \, \vec{e}_i \cdot \vec{e}_i$$

puis de conclure en utilisant que la norme des vecteurs de la base est 1 :

$$= x_1 y_1 \|\vec{e}_1\|^2 + \cdots + x_n y_n \|\vec{e}_n\|^2 = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

□

À ce stade il est légitime (et nécessaire) de se demander si les bases orthonormées existent toujours. C'est le but du théorème de Gram-Schmidt. Ce théorème est utile pour orthonormaliser les bases face à un produit scalaire étrange (par exemple celui de l'exercice III). Disposer d'une base orthonormée est l'idée fondamentale de la transformée de Fourier et nous amène à comprendre ce qu'est la vibration d'un son.

La preuve de ce théorème permet dans l'enseignement d'évaluer la compréhension de ce qu'est une récurrence et des notations assez complexes.

Théorème 15 (Gram-Schmidt). *Soit E un espace euclidient et $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ une base. Alors il existe une base orthonormée $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ de E telle que pour tout $1 \leq k \leq n$ le sous-espace vectoriel engendré par $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k)$ est égal au sous-espace vectoriel engendré par $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k)$.*

Démonstration. Nous définissons $\vec{e}_1 = \vec{v}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}$ puis par récurrence sur $k = 1, \ldots, n-1$:

$$\vec{v}_{k+1} = \vec{u}_{k+1} - (\vec{u}_{k+1} \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 - (\vec{u}_{k+1} \cdot \vec{e}_2)\vec{e}_2 - \cdots - (\vec{u}_{k+1} \cdot \vec{e}_k)\vec{e}_k \text{ et } \vec{e}_{k+1} = \frac{\vec{v}_{k+1}}{\|\vec{v}_{k+1}\|}.$$

Par récurrence sur k nous montrerions que v_k est non-nul, que e_k est bien défini (le dénominateur n'est pas nul) et que $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k)$ est une famille libre orthonormée qui engendre le même sous-espace vectoriel que $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k)$.

Vous devez au moins savoir faire les deux cas initiaux :

$$\|\vec{e}_1\| = \left\| \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} \right\| = \frac{\|\vec{u}_1\|}{\|\vec{u}_1\|} = 1$$

et vu sa définition $\vec{e}_1$ est colinéaire à $\vec{u}_1$ donc ils engendrent le même sous-espace vectoriel. Calculons maintenant :

$$\vec{v}_2 = \vec{u}_2 - (\vec{u}_2 \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 \text{ donc } \vec{e}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{e}_1 \cdot (\vec{u}_2 - ((\vec{u}_2 \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1) = \vec{e}_1 \cdot \vec{u}_2 - \vec{e}_1 \cdot (\vec{u}_2 \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1$$

$$= \vec{e}_1 \cdot \vec{u}_2 - (\vec{u}_2 \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_1 \cdot \vec{u}_2 - (\vec{u}_2 \cdot \vec{e}_1) \times 1 = 0,$$

les vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{v}_2$ sont donc orthogonaux.

Remarquons que u_2 est une combinaison linéaire de $\vec{e}_1$ et $\vec{v}_2$:

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 + (\vec{u}_2 \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1,$$

donc une combinaison linéaire de $\vec{u}_1$ et $\vec{v}_2$. Comme $\vec{u}_2$ n'est pas colinéaire à $\vec{u}_1$ nous en déduisons que $\vec{v}_2$ n'est pas colinéaire à $\vec{e}_1$ et en particulier qu'il n'est pas nul. Le vecteur $\vec{e}_2$ est donc bien défini puisque le dénominateur n'est pas nul.

Finalement, comme Le vecteur $\vec{e}_2$ est une combinaison linéaire de e_1 et u_2 donc il appartient au sous-espace vectoriel engendré par e_1 et u_2. Le sous-espace vectoriel engendré par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ est donc inclus dans le sous-espace vectoriel engendré par $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$. Le même raisonnement s'applique pour l'autre inclusion puisque $\vec{u}_2$ est aussi une combinaison linéaire de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$. □

Dans cette preuve, vous devez savoir faire une figure en dimension 2 où apparaissent tous les vecteurs de la preuve.

Nous en déduisons aisément un théorème de la base incomplète amélioré :

Corollaire 16. *Toute famille libre orthonormée peut être complétée en une base.*

Démonstration. La famille libre peut être complétée en une base et cette base peut être orthonormalisée par le procédé de Gram-Schmidt. □

De la preuve du théorème de Gram-Schmidt on déduit aussi le calcul du projeté orthogonal sur un sous-espace.

Proposition 17. *Soit V un sous-espace vectoriel d'un espace euclidient. Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$ une base orthonormée de V. Pour tout vecteur $\vec{u}$ de E, le vecteur $\vec{v} = (\vec{e}_1 \cdot \vec{u})\vec{e}_1 + \dots + (\vec{e}_m \cdot \vec{u})\vec{e}_m$ est le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur V.*

Démonstration. Nous constatons que $\vec{v}$ est une combinaison des vecteurs de la base de V donc un vecteur de V. De plus pour $i = 1, \dots, m$,

$$\vec{e}_i \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{e}_i \cdot (\vec{u} - ((\vec{e}_1 \cdot \vec{u})\vec{e}_1 + \dots + (\vec{e}_m \cdot \vec{u})\vec{e}_m)) = \vec{e}_i \cdot \vec{u} - \sum_{i=1}^{m} \vec{e}_i \cdot ((\vec{e}_j \cdot \vec{u})\vec{e}_j).$$

Or pour chaque $j = 1, \dots, m$, par linéarité du produit scalaire $\vec{e}_i \cdot ((\vec{e}_j \cdot \vec{u})\vec{e}_j) = (\vec{e}_j \cdot \vec{u}) \times (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j)$ et comme la base est orthonormée

$$\vec{e}_i \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{e}_i \cdot \vec{u} - (\vec{e}_i \cdot \vec{u}) \times (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i) = \vec{e}_i \cdot \vec{u} - (\vec{e}_i \cdot \vec{u}) = 0.$$

Le vecteur $\vec{u} - \vec{v}$ est bien orthogonal à tous les vecteurs de la base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$ de V. □

Exercice V. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2. Considérons le produit scalaire sur E défini par

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X], \quad \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt.$$

1. Construire une base orthonormée de E en partant de la base canonique $(1, X, X^2)$
2. Déterminer la projection orthogonale de la fonction sinus sur E *(les calculs sont difficiles à mener jusqu'au bout)*.
3. Interpréter votre résultat comme étant la meilleur approximation de la fonction sinus par un polynôme de degré 2 (en particulier vous tracerez précisément les courbes représentatives).

L'orthogonalité permet de construire des supplémentaires. Cela sera très utile pour la réduction des matrices symétriques.

Définition 18. *Soit $\mathcal{P}$ une partie d'un espace vectoriel euclidien E. L'**orthogonal** de $\mathcal{P}$ est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de $\mathcal{P}$. C'est un sous-espace vectoriel.*

$$\mathcal{P}^\perp = \{\vec{u} \in E \mid \forall \vec{v} \in \mathcal{P},\ \vec{u} \perp \vec{v}\}.$$

Exercice VI. Démontrer que quelque soit la partie $\mathcal{P}$, son orthogonal $\mathcal{P}^\perp$ est un sous-espace vectoriel.

Proposition 19. *Soit V un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien. Alors $V \oplus V^\perp = E$.*

Démonstration. Soit $\vec{u} \in V \cap V^\perp$ alors par définition du sous-espace othogonal $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = 0$ donc $\vec{u}$ est le vecteur nul. Nous avons donc démontré que $V \cap V^\perp = \{\vec{0}\}$.

Soit maintenant $\vec{u}$ un vecteur quelconque de E. Soit $\vec{v}$ le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur V. Alors $\vec{u} = (\vec{u} - \vec{v}) + \vec{v}$. Ce qui prouve que $E = V + V^\perp$. □

5 Matrices et orthogonalité

D'abord une terminologie imparfaite : l'étymologie voudrait qu'on parle de matrices orthonormées mais :

Définition 20. *Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est **orthogonale** si ${}^tA\,A = I_n$.*

Proposition 21. *Soit E un espace vectoriel euclidien.*

La matrice de passage entre deux bases orthonormées est orthogonale.

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}' = (\vec{e'}_1, \dots, \vec{e'}_n)$ deux bases orthonormées de E. La matrice de passage P de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ a sa j-ième colonne C_j formée par les coordonnées de $\vec{e'}_j$ par rapport à la base $\mathcal{B}$. La base $\mathcal{B}'$ est orthornomée donc pour tout $j = 1, \dots, n$, $\vec{e'}_j \cdot \vec{e'}_j = 1$ et pour $j \neq k$, $\vec{e'}_j \cdot \vec{e'}_k = 0$.

Puisque la base $\mathcal{B}$ est orthonormée, nous connaissons le produit scalaire en coordonnées et nous pouvons écrire

$$\forall j, k,\ \vec{e'}_j \cdot \vec{e'}_k = {}^tC_j\,C_k = \chi_{j=k}.$$

Ce qui s"écrit matriciellement ${}^tP\,P = I_n$. □

Le gros morceau de cette section est la réduction des matrices symétriques. Nous commençons par rappeler le lien entre matrice symétrique, forme bilinéaire symétrique, produit scalaire et forme quadratique.

Définition et Propriété 22. *Soit φ une forme bilinéiare sur un espace vectoriel E. Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E. Considérons la matrice $A = (\varphi(\vec{e}_i, \vec{e}_j))_{1 \leq i,j \leq n}$. A est la matrice carrée $n \times n$ tel que le coefficient à la i-ème ligne et la j-ième colonne est $a_{i,j} = \varphi(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$.*

Alors pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E de coordoonées respectives X et Y (sous forme de vecteurs colonnes)

$$\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = {}^tXAY = \sum_{i=1,j=1}^{n} x_i a_{i,j} y_j$$

Notez que la définition ci-dessus ne requiert pas que la base $\mathcal{B}$ soit orthonormée (ni d'ailleurs que E soit euclidien), en pratique elle le sera presque toujours.

Proposition 23. *La forme bilinéaire φ est symétrique si, et seulement si, sa matrice A l'est aussi : ${}^tA = A$.*

Exemple 24. *Sur $\mathbb{R}^2$ l'expression $x_1y_1+5x_1y_2-3x_2y_1+9x_2y_2$ défnit une forme bilinéaire qui n'est pas symétrique.*

L'écriture d'une forme bilinéaire est fastidieuse et peu lisible. On préfère écrire sa forme quadratique :

Définition 25. *Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel E. Sa **forme quadratique** est la fonction $q : E \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\forall \vec{u} \in E,\ q(\vec{u}) = \varphi(\vec{u}, \vec{u}).$$

*φ est la **forme polaire** de la forme quadratique q.*

En retournant en arrière dans ce cours, si φ est de plus positive et définie (elle définit alors un produit scalaire), alors la forme quadratique q est simplement le carré de la norme. Dans ce cadre plus général nous pouvons aussi calculer la forme polaire en fonction de la forme quadratique :

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in E,\ \varphi(\vec{u}, \vec{u}) = \frac{1}{2}(q(\vec{u}+\vec{v}) - q(\vec{u}) - q(\vec{v})).$$

Théorème 26. *Toute matrice symétrique est diagonalisable dans une base orthonormée.*

Démonstration. Pour cette preuve nous allons d'abord prouver qu'il y a au moins une valeur propre réelle puis nous procéderons par récurrence sur la dimension.

Soit A une matrice réelle carrée de taille n symétrique. Considérons l'application $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(X, Y) = {}^tXAY$. Alors φ est une application bilinéaire et symétrique (puisque A l'est).

La forme quadratique q associée à φ est une application polynômiale (à multiples variables) en les composantes de X, c'est donc une application continue de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles. Nous savons que la boule unité d'un tel espace vectoriel est compact, donc q atteind son maximum λ_1 sur cette boule. Soit X_1 tel que $q(X_1) = \varphi(X_1, X_1) = \lambda = \sup_{X \in \mathbb{R}^n,\ \|X\|=1} q(X)$.

Considérons la forme bilinéaire ψ définie pour tous vecteurs colonnes $X, Y \in \mathbb{R}^n$ par $\psi(X, Y) = \lambda_1 {}^tXY - \varphi(X, Y)$. Nous vérifions aisément que c'est bien une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$.

Ce que nous avons gagné, c'est que contrairement à φ (dont nous ne savons rien), ψ est positive : Par définition de λ_1, pour tout vecteur colonne $X \in \mathbb{R}^n$, si X est non-nul, alors $X' = \frac{1}{\|X\|}X$ est un vecteur unité et donc

$$q(X) = \varphi(X, X) = \varphi(\|X\| \frac{1}{\|X\|} X, \|X\| \frac{1}{\|X\|} X) = \varphi(\|X\|X', \|X\|X')$$

$$= \|X\|^2 \varphi(X', X') = \|X\|^2 q(X') \le \|X\|^2 \lambda_1$$

Notons que si X est nul, l'inégalité reste évidemment vraie.

Revenons à la positivité de ψ

$$\forall X \in \mathbb{R}^n,\ \psi(X,X) = \lambda_1 {}^tXX - \varphi(X,X) = \lambda_1\|X\|^2 - q(X) \geq \lambda_1\|X\|^2 - \lambda_1\|X\|^2 = 0.$$

Si nous revenons à la preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous constatons que nous n'avons pas utilisé la propriété « défini » de la forme bilinéaire (sauf pour l'étude du cas d'égalité). Nous pouvons donc appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à ψ dont nous venons de démontrer qu'elle est positive :

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^n,\ |\psi(X,Y)|^2 \leq \psi(X,X)\psi(Y,Y).$$

Attention dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz c'est la norme qui apparaissait dans le terme de droite. Mais en fait cette norme était donnée par la forme bilinéaire. Ici, il y a une norme euclidienne, donnée par ailleurs et qui n'a rien à voir avec φ ou ψ. Le terme de droite de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que nous avons utilisée est donc bien celui qui utilise ψ.

En particulier puisque $\psi(X_1,X_1) = \lambda_1 {}^tX_1X_1 - \varphi(X_1,X_1) = \lambda_1 - q(X_1,X_1) = \lambda_1 - \lambda_1 = 0$, nous obtenons que pour tout vecteur colonne $Y \in \mathbb{R}^n$, $\psi(X_1,Y) = 0$ et en poursuivant ce calcul matriciellement :

$$\psi(X_1,Y) = \lambda_1 {}^tX_1Y - \varphi(X,Y) = \lambda_1 {}^tX_1Y - {}^tX_1AY = {}^tX_1(\lambda_1 I_n - A)Y.$$

Considérons le vecteur colonne $U_1 = (\lambda_1 I_n - A)X_1$, comme A est symétrique

$${}^tU_1 = {}^t((\lambda_1 I_n - A)X_1) = {}^tX_1{}^t(\lambda_1 I_n - A) = {}^tX_1(\lambda_1 I_n - {}^tA) = {}^tX_1(\lambda_1 I_n - A) \text{ et}$$

$$0 = {}^tX_1(\lambda_1 I_n - A)Y = {}^tU_1Y.$$

Cette dernière égalité est vraie pour tout vecteur colonne Y en particulier pour $Y = U_1$ nous obtenons que le carré de la norme de U_1 est nulle donc que le vecteur colonne U_1 est nul :

$$U_1 = (\lambda_1 I_n - A)X_1 = 0 \text{ donc } AX_1 = \lambda_1 X_1.$$

Nous avons démontré que X_1 est un vecteur propre (unitaire) de la matrice A associé à la valeur propre λ_1.

Maintenant que nous avons trouvé un premier vecteur propre pour A, nous pouvons procéder par récurrence sur n pour diagonaliser A.

Complétons pour obtenir une base orthonormée $\mathcal{B}_1 = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Soit P la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{B}_1$, c'est-à-dire que les colonnes de P sont exactement les vecteurs colonnes X_1, X_2, etc. Alors nous avons vu que la matrice P est orthogonale.

Nous pouvons calculer la matrice $A_1 = {}^tPAP$ coefficient par coefficient. Pour le premier vecteur de la base canonique E_1, par définition de la matrice de passage $X_1 = PE_1$ et

$${}^tE_1A_1E_1 = {}^tE_1{}^tPAPE_1 = {}^t(PE_1)A(PE_1) = {}^tX_1AX_1 = \varphi(X_1,X_1) = \lambda_1.$$

Le coefficient dans le coin en haut à gauche de A_1 (première ligne, première colonne) est donc λ_1.

Pour n'importe quel autre vecteur de la base canonique E_j avec $j = 2, \dots, n$

$$
\begin{aligned}
{}^tE_1A_1E_j = {}^tE_1{}^tPAPE_j = {}^t(PE_1)A(PE_j) = {}^tX_1AX_j = \varphi(X_1, X_j)\\
= \lambda_1{}^tX_1X_j - \psi(X_1, X_j) = 0 \text{ car } \psi(X_1, Y) = 0 \text{ pour tout vecteur colonne } Y.
\end{aligned}
$$

Ce qui démontre que le coefficient de la première ligne et de j-ième colonne de A_1 est nul.

De même nous montrerions que tous les coefficients de la première colonne de A_1 sont nuls sauf le premier.

Finalement nous avons démontré que A_1 est une matrice diagonale par bloc de la forme :

$$
A_1 = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right)
$$

Comme la matrice A est symétrique et que la matrice P est orthogonale, la matrice A_1 est symétrique et la matrice B_1 l'est aussi.

Finalement puisque B_1 est une matrice réelle symétrique de taille $(n-1) \times (n_1)$ par récurrence sur n nous pourrions démontrer qu'il existe une matrice orthogonale Q telle que ${}^tQB_1Q = D_1$ est diagonale. Nous pouvons former la matrice diagonale par bloc $\widetilde{Q}$, montrer qu'elle est orthogonale en effectuant les opérations par blocs et obtenir :

$$
\widetilde{Q} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & Q & \\ 0 & & & \end{array}\right), \quad {}^t\widetilde{Q}\widetilde{Q} = {}^t\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & Q & \\ 0 & & & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & Q & \\ 0 & & & \end{array}\right)
$$

$$
= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & {}^tQ & \\ 0 & & & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & Q & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & {}^tQQ & \\ 0 & & & \end{array}\right)
$$

$$
= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) = I_n
$$

$$
{}^t\widetilde{Q}A_1\widetilde{Q} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & {}^tQ & \\ 0 & & & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & Q & \\ 0 & & & \end{array}\right)
$$

$$
= \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & {}^tQB_1Q & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & D_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \widetilde{D}_1
$$

qui est bien une matrice diagonale. Finalement $P\widetilde{Q}$ est une matrice orthogonale et

$$
{}^t(P\widetilde{Q})A(P\widetilde{Q}) = {}^t\widetilde{Q}({}^tPAP)\widetilde{Q} = {}^t\widetilde{Q}A_1\widetilde{Q} = \widetilde{D}_1.
$$

$\square$

Vous l'avez constaté cette preuve est longue et difficile. Elle se découpe nettement en deux parties. D'abord démontrer l'existence d'une valeur propre réelle. Cette première partie repose sur l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ et sur l'analyse (une fonction continue sur un compact atteind son maximum). Ensuite il faut faire un raisonnement par récurrence sur la taille n de la matrice. Je n'ai pas ci-dessus rédigé complètement cette récurrence. Entre ces deux parties il faut bien comprendre qu'il faut induire sur le sous-espace orthogonal au premier vecteur propre trouvé (c'est le but de l'utilisation de la base orthonormée).

En pratique ce théorème profond, n'est pas simple à mettre en œuvre. Nous nous contenterons (et c'est déjà beaucoup) de quelques tracés d'ellipses et d'hyperboles.

6 Ellipses et coniques

Définition 27. *Une conique est une partie du plan d'équation $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ où a, b, c, d, e, f sont des réels et $(a, b, c) \neq (0, 0, 0, 0)$.*

Cette définition calculatoire est très décevante et ne rend pas justice à la longue étude des coniques par les mathématiques.

On peut aussi les définir à partir d'un foyer (un point) F, une directrice (une droite) $\mathcal{D}$ (avec $F \notin \mathcal{D}$) et une excentricité $e > 0$: L'ensemble des points M du plan tels que $MF = e\,d(M, \mathcal{D})$ défini une conique. Si $e < 1$ c'est une **ellipse**, si $e = 1$ c'est une **parabole**, si $e > 1$ c'est une **hyperbole**.

Cette définition par foyer, directrice et excentricité, n'inclu malheureusement pas les cercles (qui sont inclus dans notre définition analytique).

Comme vous le savez les coniques décrivent les trajectoires de deux corps pesant dans l'espace. Les lois de KEPLER font partie de la culture scientifique indispensable d'un-e enseignant-e de mathématiques.

Partant d'une conique donnée par une équation de degré 2 comme ci-dessus, nous extrayons la forme quadratique $q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ et sa forme polaire $\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = axx' + \frac{b}{2}x'y + \frac{b}{2}xy' + xyy'$ (notez que le double produit a été séparé en deux). Enfin nous avons la matrice $A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$. Cette matrice est symétrique et grâce au paragraphe précédent nous pouvons la diagonaliser pour arriver dans une base orthonormée à une équation de la forme : $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + DX + EY + F = 0$ où A, B, D, E, F sont des réels avec (λ_1, λ_2) les valeurs propres de la matrice A qui ne sont pas toutes les deux nuls.

Si λ_1 et λ_2 sont de même signe alors la conique est une ellipse et quitte à changer l'origine du repère nous obtenons une équation de la forme $\frac{X'^2}{\alpha^2} + \frac{Y'^2}{\beta^2} = F'$ où α, β sont des réels stricitement positif. C'est une ellispe. Si $F' < 0$ la conique est vide, si $F' = 0$ elle est réduite à l'origine. Si $F' > 0$ c'est une vraie conique et les axes du nouveau repère sont ses axes. Si $\alpha = \beta$ alors c'est un cercle.

Si λ_1 et λ_2 sont de signe contraire, c'est une hyperbole et quitte à changer l'origine du repère nous obtenons une équation de la forme $\frac{X'^2}{\alpha^2} - \frac{Y'^2}{\beta^2} = F'$. Nous avons le début d'une identité remarquable : en factorisant, les asymptotes de cette hyperbole sont les droites d'équations $\frac{X'}{\alpha} + \frac{Y'}{\beta} = 0$ et $\frac{X'}{\alpha} - \frac{Y'}{\beta} = 0$ (si $F' = 0$ l'hyperbole est dégénérée et égale à la réunion de ses deux asymptotes).

Enfin si l'une des deux valeurs propres A ou B est nul alors la conique est une parabole.

Les coniques ne sont pas à proprement parler au programme du CAPES. Mais de nombreux problèmes d'écrit du CAPES peuvent comporter une étude des coniques. Toutes les définitions et notions seront alors rappelées, mais mieux vaut avoir un peu de culture !

Exercice VII. **1.** Tracer l'ellipse d'équation $x^2 - xy + y^2 = 1$.
2. Tracer la conique d'équation $4x^2 - 24xy + 11y^2 = 5$

7 Isométries

Nous terminons ce chapitre en rappelant le lien entre isométries et matrices orthogonales (lien que nous avons déjà utilisé plus haut !)

Proposition 28. *Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{B}$. La matrice A d'une isométrie f de E par rapport à $\mathcal{B}$ orthogonale.*

Démonstration. D'après la Proposition 13, l'isométrie f conserve aussi le produit scalaire donc l'orthogonalité. Ainsi, l'image de la base orthonormée $\mathcal{B}$ par f est une base orthonormée $\mathcal{B}'$. Les colonnes de la matrice A sont constituées par les coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ par rapport à la base $\mathcal{B}$. D'après l'expression du produit scalaire en coordonnées donnée par la Proposition 14, nous obtenons que ${}^tAA = I_n$ donc que A est une matrice orthogonale. □

L'ensemble des matrices orthogonales de taille $n \times n$ forme un groupe noté $O_n(\mathbb{R})$.

La réduction des matrices orthogonales est plus compliquée que celle des matrices symétriques, en particulier parce qu'il n'y a pas forcément de valeurs propres réels (par exemple pour la matrice R_θ de la rotation d'angle θ en dimension 2 avec $\theta \neq 0 \pmod{\pi}$). Néanmoins, en passant dans le corps des nombres complexes en utilisant les valeurs propres $e^{i\theta}$, nous pouvons démontrer

Théorème 29. *Toute matrice orthogonale est diagonalisable par blocs dans une base orthonormée et chaque bloc est soit de taille 1 et égal à 1 ou -1 soit de taille 2 et égal à la matrice de la rotation R_θ avec $\theta \neq 0 \pmod{\pi}$.*

$$\forall A \in O_n(\mathbb{R})\ \exists P \in O_n(\mathbb{R}),\ {}^tPAP = \begin{pmatrix} I_r & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -I_s & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$