Exercice I. **1.** Vérifiez que vous êtes capable d'écrire la définition d'un espace vectoriel, celle d'un corps. Vérifiez que vous savez énoncer les règles usuelles du calcul : associativité, commutativité, distributivité, linéarité.
2. Le produit scalaire est-il associatif ?

Exercice II. Dans l'équivalence utilisée pour la définition, une des implications est vraie pour toutes les formes bilinéaires : démontrez, en utilisant les propriétés usuelles du calcul, c'est-à-dire la bilinéarité, que pour toute forme bilinéaire et tout vecteur $\vec{u}$: $\varphi(\vec{u},\vec{0}) = \varphi(\vec{0},\vec{u}) = \varphi(\vec{0},\vec{0})$.

Exercice III. Soit E l'espace des fonctions continues de $[0;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
1. Rappeler que c'est un espace vectoriel.
2. Démontrer que $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$ pour deux fonctions $f,g \in E$ défini un produit scalaire.

Exercice IV. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes réels de degré inférieur ou égal à deux. Pour $P,Q \in \mathbb{R}_2[X]$ on définit $\langle P,Q\rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$. Vérifier que cela fait de E un espace euclidien.

Exercice V. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2. Considérons le produit scalaire sur E défini par

$$\forall P,Q \in \mathbb{R}_2[X], \qquad \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt.$$

1. Construire une base orthonormée de E en partant de la base canonique $(1, X, X^2)$
2. Déterminer la projection orthogonale de la fonction sinus sur E *(les calculs sont difficiles à mener jusqu'au bout).*
3. Interpréter votre résultat comme étant la meilleur approximation de la fonction sinus par un polynôme de degré 2 (en particulier vous tracerez précisément les courbes représentatives).

Exercice VI. Démontrer que quelque soit la partie $\mathcal{P}$, son orthogonal $\mathcal{P}^\perp$ est un sous-espace vectoriel.

Exercice VII. **1.** Tracer l'ellipse d'équation $x^2 - xy + y^2 = 1$.
2. Tracer la conique d'équation $4x^2 - 24xy + 11y^2 = 5$