Exercice I. **1.** Vérifiez que vous êtes capable d'écrire la définition d'un espace vectoriel, celle d'un corps. Vérifiez que vous savez énoncer les règles usuelles du calcul : associativité, commutativité, distributivité, linéarité.
2. Le produit scalaire est-il associatif ?

Exercice II. Dans l'équivalence utilisée pour la définition, une des implications est vraie pour toutes les formes bilinéaires : démontrez, en utilisant les propriétés usuelles du calcul, c'est-à-dire la bilinéarité, que pour toute forme bilinéaire et tout vecteur $\vec{u}$: $\varphi(\vec{u},\vec{0}) = \varphi(\vec{0},\vec{u}) = \varphi(\vec{0},\vec{0})$.

Exercice III. Soit E l'espace des fonctions continues de $[0;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
1. Rappeler que c'est un espace vectoriel.
2. Démontrer que $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$ pour deux fonctions $f,g \in E$ défini un produit scalaire.

Exercice IV. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes réels de degré inférieur ou égal à deux. Pour $P,Q \in \mathbb{R}_2[X]$ on définit $\langle P,Q\rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$. Vérifier que cela fait de E un espace euclidien.

Exercice V. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2. Considérons le produit scalaire sur E défini par

$$\forall P,Q \in \mathbb{R}_2[X], \qquad \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt.$$

1. Construire une base orthonormée de E en partant de la base canonique $(1, X, X^2)$

Nous remarquons que le premier vecteur $P_0(X) = 1$ est de norme 1 : $\int_0^1 P_0(t)\,dt = \int_0^1 dt = 1$.
Nous remarquons aussi que le deuxième vecteur de la base $P_1(X) = X$ n'est pas orthogonal au premier :

$$\langle P_0, P_1 \rangle = \int_0^1 P_0(t)P_1(t)\,dt = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}.$$

Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt nous donne

$$Q_1 = P_1 - \langle P_0, P_1 \rangle P_0 \text{ donc } Q_1(X) = X - \frac{1}{2}.$$

Ce vecteur Q_1 n'est pas de norme 1, nous calculons en effet

$$\|Q_1\|^2 = \langle Q_1, Q_1 \rangle = \int_0^1 Q_1(t)Q_1(t)\,dt = \int_0^1 (t - \frac{1}{2})^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + \frac{t}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{12}.$$

Nous définissons donc $R_1 = \frac{Q_1}{\|Q_1\|} = 2\sqrt{3}Q_1$ donc $R_1(X) = (2X-1)\sqrt{3}$.
Nous calculons maintenant les produits scalaires avec le troisième vecteur de la base $P_2(X) = X^2$:

$$\langle P_2, P_0 \rangle = \int_0^1 P_2(t)P_0(t)\,dt = \int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3} \text{ et}$$

$$\langle P_2, R_1 \rangle = \int_0^1 P_2(t)R_1(t)\,dt = \int_0^1 t^2(2t-1)\sqrt{3}\,dt = \left[\frac{t^4}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 \times \sqrt{3} = (\frac{1}{2} - \frac{1}{3})\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{6},$$

puis nous définissons

$$Q_2 = P_2 - \langle P_2, P_0 \rangle P_0 - \langle P_2, R_1 \rangle R_1 \text{ donc } Q_2(X) = X^2 - \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}(2X-1)\sqrt{3}) = X^2 - X + \frac{1}{6}.$$

Nous calculons la norme de ce nouveau vecteur

$$\|Q_2\|^2 = \langle Q_2, Q_2 \rangle = \int_0^1 Q_2(t)Q_2(t)\,dt = \int_0^1 (t^2 - t + \frac{1}{6})^2\,dt = \frac{1}{180}$$

et nous obtenons le vecteur de norme 1 : $R_2 = \frac{Q_2}{\|Q_2\|}$ donc $R_2(X) = 6\sqrt{5}(X^2 - X + \frac{1}{6})$.

La base $(P_0, R_1, R_2) = (1, (2X-1)\sqrt{3}, 6\sqrt{5}(X^2 - X + \frac{1}{6}))$ est orthonormée.

2. Déterminer la projection orthogonale de la fonction sinus sur E *(les calculs sont difficiles à mener jusqu'au bout).*

Comme nous disposons de la base orthonormée (P_0, R_1, R_2) de $\mathbb{R}_2[X]$ calculée à la question précédente et que notre produit scalaire est un produit scalaire sur l'espace des fonctions continues comme nous l'avons démontré à l'exercice III, nous pouvons calculer le projeter orthogonal Q :

$$Q = \langle \sin, P_0 \rangle P_0 + \langle \sin, R_1 \rangle R_1 + \langle \sin, R_2 \rangle R_2.$$

En effet Q est bien un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 (puisque qu'il est la combinaison linéaire de 3 tels polynômes) et un calcul rapide montre que la fonction $\sin - Q$ est orthogonal aux trois vecteurs de la base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$. Terminons donc le calcul avec quelques intégrations par parties :

$$\langle \sin, P_0 \rangle = \int_0^1 \sin(t) \times 1 \, dt = 1 - \cos(1) \simeq 0.460,$$

$$\langle \sin, R_1 \rangle = \int_0^1 \sin(t)(2t-1)\sqrt{3} \, dt = -\sqrt{3}(\cos(1) - 2\sin(1) + 1) \simeq 0.247 \text{ et}$$

$$\langle \sin, R_2 \rangle = \int_0^1 \sin(t) 6\sqrt{5}(t^2 - t + \frac{1}{6}) \, dt = \sqrt{5}(11\cos(1) + 6\sin(1) - 11) \simeq -0.018.$$

Finalement nous obtenons le projeté orthogonal

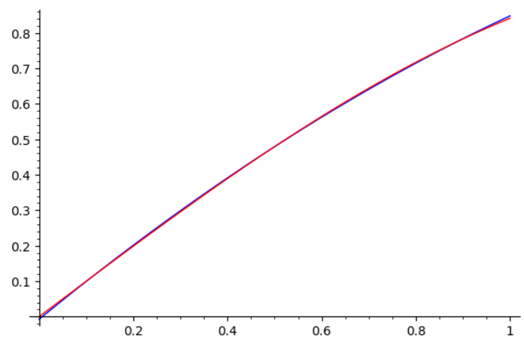
$$Q(X) = 30\,(11\cos(1) + 6\sin(1) - 11)X^2 - 12(28\cos(1) + 14\sin(1) - 27)X$$
$$+3(19\cos(1) + 8\sin(1) - 17)$$
$$\simeq -0.235X^2 + 1.091X - 0.007$$

(je sais c'est horrible, seul un logiciel de calcul formel comme Sage (`sagemath.org`) peut vous permettre de mener ce calcul à bien.)

3. Interpréter votre résultat comme étant la meilleur approximation de la fonction sinus par un polynôme de degré 2 (en particulier vous tracerez précisément les courbes représentatives).

En bleu : la parabole représentant le polynôme Q. Et, en rouge : la fonction sinus. Nous constatons que les deux fonctions sont très très proches. Il s'agit d'une très bonne approximation.

Rappelons que le projeté orthogonal d'un point sur un sous-espace est le point le plus proche. Ici nous avons mesuré la distance avec le poduit scalaire proposé. La parabole trouvée est donc celle qui minimise l'aire du carré de la différence entre Q et sinus sur l'intervalle $[0; 1]$.



Exercice VI. Démontrer que quelque soit la partie $\mathcal{P}$, son orthogonal $\mathcal{P}^\perp$ est un sous-espace vectoriel.

Exercice VII. **1.** Tracer l'ellipse d'équation $x^2 - xy + y^2 = 1$.

Nous observons que cette équation est inchangée si on échange x et y. L'ellipse cherchée est donc invariante par symétrie axiale par rapport aux bissectrices du repère. Considérons donc la base orthonormée donnée par ces bissectrices :

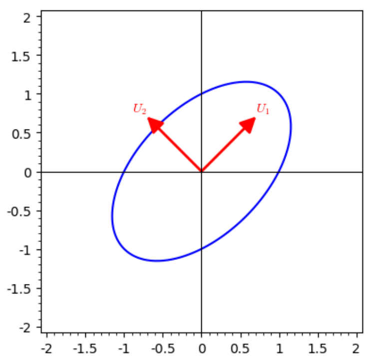
$$U_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \text{ et } U_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \text{la base } \mathcal{B}' = (U_1, U_2) \text{ et } P = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}.$$

où P est la matrice de passage. Soit $U = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$, nous pouvons alors changer de coordonnées :

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \text{ donc } \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y') \end{cases}$$

En remplaçant dans l'équation de l'ellipse nous obtenons l'équation dans la nouvelle base

$$x'^2 + 3y'^2 = 2.$$



C'est bien une ellipse. La première bissectrice du repère (U_1) est le grand axe et la deuxième bissectrice (U_2) est le petit axe. L'excentricité de l'ellipse est $e = \sqrt{3}$.

2. Tracer la conique d'équation $4x^2 - 24xy + 11y^2 = 5$

Cette fois les symétries de la conique ne sont pas immédiates.
Nous considérons donc la matrice de la forme bilinéaire associée, son polynôme caractéristique et ses valeurs propres :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ -12 & 11 \end{pmatrix},\ \chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 15\lambda - 100 \text{ et } \lambda_1 = 20,\ \lambda_2 = -5$$

Les deux valeurs propres sont de signes contraires, la courbe est donc une hyperbole. Nous calculons des vecteurs propres unitaires et la matrice de passage vers la base de vecteurs propres :

$$U_{20} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix},\ U_{-5} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix},\ P = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Nous obtenons } {}^tPAP = \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Dans le repère (O, U_{20}, U_{-5}) l'hyperbole a pour équations $4x'^2 - y'2 = 1$.
Remarquons que ce n'est pas la forme sous laquelle vous connaissez les hyperboles qui sont plutôt pour vous la courbe représentative de la fonction inverse.
Nous cherchons donc les asymptotes de l'hyperbole en remplaçant la constante 1 par 0 :

$$4x'^2 - y'^2 = 0 \iff (2x' - y')(2x' + y') = 0 \iff y' = 2x' \text{ ou } y' = -2x'$$

Les droites d'équations $\mathcal{D}_1 :\ y' = 2x'$ et $\mathcal{D}_2 :\ y' = -2x'$ sont les asymptotes de l'hyperbole. En prenant des vecteurs directeurs de ces deux droites V_1 de coordonnées $(1, 2)$ par rapport à la base (U_{20}, U_{-5}) et V_2 de coordonnées $(1 - 2)$, nous pouvons écrire l'équation de l'hyperbole dans le repère (O, V_1, V_2) : $x''y'' = 1$ ce qui s'écrit aussi $y'' = \frac{1}{x''}$.

Attention cependant : ce troisième repère (O, V_1, V_2) n'est pas orthonormé !