

Exercice I. Soit $ABCD A' B' C' D'$ un cube, I , J et K les milieux respectifs de $[AB]$, $[B' C']$ et $[DD']$. Dessiner l'intersection du plan IJK avec le cube. Montrer que c'est un hexagone régulier.

Exercice II. Déterminer une équation cartésienne :

1. du plan $\mathcal{P}_1$ passant par $A(1, 1, 0)$, $B(0, 2, 2)$ et $C(3, 0, 3)$;
2. du plan $\mathcal{P}_2$ passant par A et parallèle au plan d'équation $3x - 5y + 7z + 3 = 0$;
3. de la droite $\mathcal{D}_1$ passant par B parallèle aux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.
4. Déterminer un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}_2$ intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

Exercice III. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de du point $A(1, 2, 3)$ sur :

1. le plan $\mathcal{P}$ d'équation $3x - 3y + 2z + 19 = 0$;
2. la droite $\mathcal{D}$ passant par $B(-8, 10, 3)$ et de vecteur directeur $u(-1, 3, 1)$.

Exercice IV. 1. Déterminez un système d'équation de la droite Δ passant par $A = (1, -1, 2)$ et coupant les droites :

$$\mathcal{D}_1 \begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ x + 2y + z + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_2 \begin{cases} x - y + z + 3 = 0 \\ x + 2y + 5z + 1 = 0 \end{cases}.$$

2. Déterminer la distance entre les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

Exercice V. On considère dans l'espace affine euclidien de dimension 3 les points

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Caculer le volume du tétraèdre ABCD.

Exercice VI. Dessiner les cinq polyèdres réguliers en perspective cavalière.

Exercice VII. 1. Déterminer le projeté orthogonal du point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ sur le plan d'équation $2x + 2y - z = 1$.

2. Même question avec la droite d'équation $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - z = 2 \end{cases}$.

Exercice VIII. On considère les droites $\mathcal{D}_1$ passant par $A_1(1, 2, -1)$ et de vecteur directeur $u_1 = (1, 1, 1)$ et $\mathcal{D}_2$

d'équation $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - z = 2 \end{cases}$.

1. Montrer que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas coplanaires.
2. Déterminer la perpendiculaire commune à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.
3. Déterminer l'ensemble des points équidistants de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

Exercice IX. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on considère la droite

$$\mathcal{D}_t : \begin{cases} x - z = t \\ tx - 2y + tz + 1 = 0 \end{cases}$$

1. Donner un vecteur directeur de $\mathcal{D}_t$.
2. Montrer que pour tous $t \neq t'$, les droites $\mathcal{D}_t$ et $\mathcal{D}_{t'}$ ne sont pas coplanaires.
3. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout point M de $\mathcal{D}_t$ de coordonnées (x, y, z) on a $x^2 - z^2 = 2y - 1$.
4. Réciproquement, montrer que pour tout point $M(x, y, z)$ qui vérifie $x^2 - z^2 = 2y - 1$, il existe t (que l'on calculera) tel que M appartient à $\mathcal{D}_t$.