Certains exercices repris de exo7.emath.fr, d'autres de wims.unice.fr. Ces deux sites regorgent d'exercices que vous pouvez faire tout seul, avec des corrections, des QCM, etc.

Exercice I. Soient A, B et C trois points non alignés d'un plan affine. Déterminer l'ensemble des points ayant mêmes coordonnées dans les repères $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.

Exercice II. Soit $R_1 = (0, e_1, e_2, e_3)$ un repère cartésien d'un espace affine. Soient $O' = (1, 0, 0)$, $e'_1 = e_1 + e_2$, $e'_2 = e_1 - e_2$, $e'_3 = e_3$ et $R_2 = (0', e'_1, e'_2, e'_3)$. Déterminer les coordonnées d'un point dans R_2 en fonction de ses coordonnées dans R_1.

Exercice III. On fixe un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ d'un plan affine On considère l' application f ayant l'expression analytique suivante :

$$\begin{cases} x' = -2x + 6y + 3 \\ y' = -x + 3y + 1. \end{cases}$$

1. Déterminer les points fixes de f.
2. Déterminer une base $(\vec{u}_0, \vec{u}_1)$ de vecteurs propres de la partie linéaire de f.
3. Soit A le point de coordonnées $(1, 0)$. Donner l'expression analytique de f par rapport au repère $(A, \vec{u}_0, \vec{u}_1)$.
4. Reconnaître l'application f.

Exercice IV. Soient $(D_i)_{i=1\dots4}$ quatre droites du plan affine sécantes deux à deux en six points distincts. Si deux d'entre elles se coupent en A et les deux autres en B, on dit que $[AB]$ est une diagonale. Montrer que les milieux des trois diagonales sont alignés (on étudiera le problème analytiquement en choisissant un bon repère).

Exercice V. Soit (E) l'ensemble d'équation cartésienne $2x^2 + 5xy + 3y^2 - 3x - 2y - 5 = 0$.
1. Trouver un point A du plan tel que dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$ l'équation de (E) n'a pas de terme de degré 1.
2. Faire disparaître le double produit pour faire apparaître la différence de deux carrés. Puis montrer que (E) est une réunion de deux droites.
3. Donner les équations de ces deux droites dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. En déduire une factorisation de l'équation initiale.

Exercice VI. Parbole équidistante d'une droite et d'un point. Dans le plan euclidient muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère la droite $\mathcal{D} : 3x + 4y - 2 = 0$ et le point $F(5, 3)$.
1. Faire une figure.
2. Déterminer les coordonnées du point H projeté orthogonal de F sur $\mathcal{D}$.
3. Rappeler la formule qui donne la distance d'un point $M(x_0, y_0)$ à la droite $\mathcal{D}$.
4. Donner une équation cartésienne de l'ensemble $\mathcal{P}$ des points équidistants de $\mathcal{D}$ et de F.
On considère maintenant le point $\Omega(\frac{7}{2}, 1)$ et les vecteurs $\vec{u}_1$ de coordonnées $\frac{1}{5}(4, -3)$ et $\vec{u}_2$ de coordonnées $\frac{1}{5}(3, 4)$.
5. Démontrer que le repère $\mathcal{R}' = (\Omega, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est orthonormé.
6. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{HF}$ en fonction de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$. En déduire les coordonnées de F et de H par rapport au repère $\mathcal{R}'$.
7. Donner une équation de la droite $\mathcal{D}$ par rapport au repère $\mathcal{R}'$.
8. Donner l'équation de $\mathcal{P}$ par rapport au repère $\mathcal{R}'$.
9. Conclure en donnant la nature de $\mathcal{P}$.

Exercice VII. Hyperboloïde équidistant de deux droites non-coplanaires.

1. Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites non parallèles de l'espace euclidien.

a. Démontrer qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire (c'est-à-dire orthogonale et sécante) à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. *(Vous pourrez considérer le plan contenant $\mathcal{D}$ et perpendiculaire à $\mathcal{D}'$ et son intersection avec $\mathcal{D}'$.)*

Soit $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ des vecteurs unitaires de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ respectivement. Soit $\vec{i} = \frac{1}{\|\vec{u}+\vec{u}'\|}(\vec{u}+\vec{u}')$ et $\vec{j} = \frac{1}{\|\vec{u}-\vec{u}'\|}(\vec{u}-\vec{u}')$. Soit $\vec{k}$ un vecteur directeur unitaire de Δ.

b. Démontrer que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée de l'espace.

c. Donner les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par rapport à cette base.

Soit A et B les intersections de Δ avec $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ respectivement. Soit O le milieu de $[AB]$. On suppose que $\vec{k} = \frac{1}{\|\overrightarrow{AB}\|}\overrightarrow{AB}$.

d. Démontrer que dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on a les équations suivantes :

$$\mathcal{D} : \left\{ \begin{array}{l} y = \alpha x \\ z = h \end{array} \right. , \quad \mathcal{D}' : \left\{ \begin{array}{l} y = -\alpha x \\ z = -h \end{array} \right. \quad \text{et } \Delta : x = y = 0. \text{ où } \alpha = \frac{\|\vec{u}-\vec{u}'\|}{\|\vec{u}+\vec{u}'\|} \text{ et } h = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|$$

e. Soit M un point de l'espace de coordonnées (x, y, z) par rapport au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Démontrer que

$$d(O, \mathcal{D})^2 = \frac{(y-\alpha x)^2}{1+\alpha^2} + (z-h)^2.$$

f. En déduire que l'ensemble $\mathcal{H}$ des points de l'espace équidistants des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ a pour équation

$$\mathcal{H} : hz = -\frac{\alpha}{1+\alpha^2}xy.$$

Exercice VIII. Dans l'espace euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les droites

$$\mathcal{D} : \left\{ \begin{array}{l} x - y - z + 1 = 0 \\ x + y + 3 = 0 \end{array} \right. , \quad \mathcal{D}' : \left\{ \begin{array}{l} x = t - 1 \\ y = 2t + 1 \\ z = t \end{array} \right. \quad t \in \mathbb{R}$$

1. Démontrer que ces deux droites ne sont pas coplanaires.

2. Déterminer une équation de l'ensemble $\mathcal{H}$ des points M de l'espace équidistants de ces deux droites.

Bonus spécial pour celles et ceux qui arrivent à tracer ces hyperboloïdes en 3 dimension avec Geogebra ou Sage.