Certains exercices repris de exo7.emath.fr, d'autres de wims.unice.fr. Ces deux sites regorgent d'exercices que vous pouvez faire tout seul, avec des corrections, des QCM, etc.

Exercice I. Soient A, B et C trois points non alignés d'un plan affine. Déterminer l'ensemble des points ayant mêmes coordonnées dans les repères $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.

Soit M un point du plan de coordonnées (x, y) par rapport à ces deux repères. Alors par définition des coordonnées :

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BC},$$

et en utilisant la relation de CHASLES nous exprimons de deux manières différentes

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} = (x-1)\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$$

$$= x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BC} = -x\overrightarrow{AB} + y(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = -(x+y)\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$$

Commes les points A, B et C ne sont pas alignés, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc forment une pase du plan vectoriel. Il y a donc unicité des coordonnées et nous obtenons $x-1 = -x+y$ et $y = y$.
La droite d'équation $y = 2x - 1$ (par rapport aux deux repères !) est l'ensemble des points du plan qui ont les mêmes coordonnées par rapport aux repères $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.

Exercice II. Soit $R_1 = (O, e_1, e_2, e_3)$ un repère cartésien d'un espace affine. Soient $O' = (1, 0, 0)$, $e'_1 = e_1 + e_2$, $e'_2 = e_1 - e_2$, $e'_3 = e_3$ et $R_2 = (O', e'_1, e'_2, e'_3)$. Déterminer les coordonnées d'un point dans R_2 en fonction de ses coordonnées dans R_1.

Soit M un point du plan de coordonnées (x_1, x_2, x_3) par rapport au repère R_1 et (x'_1, x'_2, x'_3) par rapport à R_2.
Revenons à la définition des coordonnées d'un point et d'un vecteur et calculons :

$$\overrightarrow{OM} = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \text{ et } \overrightarrow{O'M'} = x'_1e'_1 + x'_2e'_2 + x'_3e'_3 = x'_1(e_1 + e_2) + x'_2(e_1 - e_2) + x'_3e_3$$

$$= (x'_1 + x'_2)e_1 + (x'_1 - x'_2)e_2 + x'_3e_3 = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM} - e_1$$

$$\text{donc } \overrightarrow{OM} = (x'_1 + x'_2)e_1 + (x'_1 - x'_2)e_2 + x'_3e_3 + e_1 = (x'_1 + x'_2 + 1)e_1 + (x'_1 - x'_2)e_2 + x'_3e_3$$

Comme (e_1, e_2, e_3) est une base nous pouvons identifier les coordonnées et résoudre le système :

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 + x'_2 + 1 \\ x_2 = x'_1 - x'_2 \\ x_3 = x'_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x'_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - 1) & \frac{1}{2}(L1 + L2) \\ x'_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 - 1) & \frac{1}{2}(L_1 - L_2) \\ x'_3 = x_3 \end{cases}$$

Exercice III. On fixe un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ d'un plan affine On considère l' application f ayant l'expression analytique suivante :

$$\begin{cases} x' = -2x + 6y + 3 \\ y' = -x + 3y + 1. \end{cases}$$

1. Déterminer les points fixes de f.

Nous résolvons le système

$$\begin{cases} x = -2x + 6y + 3 \\ y = -x + 3y + 1. \end{cases} \iff x = 2y + 1$$

L'ensemble des points fixes de f est donc la droite d'équation $y = 2x + 1$.

2. Déterminer une base $(\vec{u}_0, \vec{u}_1)$ de vecteurs propres de la partie linéaire de f.

La matrice de la partie linéaire de f par rapport à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ dont le polynôme caractérstique est $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)$. Cette matrice a donc deux valeurs propres 0 et 1.
Après un rapide calcul nous trouvons des vecteurs propres associés (respectivement) $\vec{u}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui forment une base de vecteurs propres.

3. Soit A le point de coordonnées $(1, 0)$. Donner l'expression analytique de f par rapport au repère $(A, \vec{u}_0, \vec{u}_1)$.

Soit M un point du plan de coordonnées de (x, y) par rapport au repère $\mathcal{R}$ et de coordonnées (X, Y) par rapport au repère $(A, \vec{u}_0, \vec{u}_1)$. Écrivons les définitions des coordonnées par rapport à un repère et à une base et calculons :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \text{ et } \overrightarrow{AM} = X\vec{u}_0 + Y\vec{u}_1 = X(3\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + Y(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = (3X + 2Y)\vec{e}_1 + (X + Y)\vec{e}_2$$
$$= \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM} - \vec{e}_1 = (x - 1)\vec{e}_1 + y\vec{e}_2.$$

Comme $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base, nous pouvons identifier les coordonnées et calculer :

$$\begin{cases} x - 1 = 3X + 2Y \\ y = X + Y \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3X + 2Y + 1 \\ y = X + Y \end{cases} \iff \begin{cases} X = x - 2y - 1 & (L_1 - 2L_2) \\ Y = -x + 3y + 1 & (3L_2 - L_1) \end{cases}$$

Considérons maintenant le point M' image du point M par l'application f et ses coordonnées (x', y') par rapport au repère $\mathcal{R}$ et (X', Y') par rapport au repère $(A, \vec{u}_0, \vec{u}_1)$. En utilisant la forme analytique de f et les formules de changement de repères ci-dessus :

$$\begin{cases} x' = -2x + 6y + 3 \\ y' = -x + 3y + 1. \end{cases} \iff \begin{cases} 3X' + 2Y' + 1 = -2(3X + 2Y + 1) + 6(X + Y) + 3 = 2Y + 1 \\ X' + Y' = -(3X + 2Y + 1) + 3(X + Y) + 1 = Y - 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3X' + 2Y' = 2Y \\ X' + Y' = Y \end{cases} \iff \begin{cases} X' = 0 & (L_1 - 2L_2) \\ Y' = Y & (3L_2 - L_1) \end{cases}$$

qui est la forme analytique de l'application f par rapport au nouveau repère $(A, \vec{u}_0, \vec{u}_1)$.

4. Reconnaître l'application f.

Nous reconnaissons par rapport au repère $(A, \vec{u}_0, \vec{u}_1)$ que l'application f est la projection sur l'axe des ordonnées par rapport à l'axe des abscisses.
Géométriquement, l'application f est donc la projection sur la droite $\mathcal{D}_0 = (A, \vec{u}_0)$ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}_0$ parallèlement à la direction $\vec{u}_1$.

Exercice IV. Soient $(D_i)_{i=1\dots4}$ quatre droites du plan affine sécantes deux à deux en six points distincts. Si deux d'entre elles se coupent en A et les deux autres en B, on dit que $[AB]$ est une diagonale. Montrer que les milieux des trois diagonales sont alignés (on étudiera le problème analytiquement en choisissant un bon repère).

Puisque l'énoncé ne nous propose pas de repère, nous allons en choisir un qui minimise les calculs. Soit A_{ij} le point d'intersection des droites D_i et D_j pour deux indices i et j entre 1 et 4 et distincts. Considérons le repère affine $\mathcal{R} = (A_{12}, A_{13}, A_{23})$. La droite $(A_{12}A_{13}) = D_1$ est donc l'axe des abscisses et la droite $(A_{12}A_{23}) = D_2$ est l'axe des ordonnées. La droite D_3 passe par les points A_{13} de coordonnées $(1, 0)$ et A_{23} de coordonnées $(0, 1)$, elle a donc pour équation $D_3 : x + y = 1$. Le point A_{14} est un point de la droite D_1 qui est l'axe des abscisses, il a donc pour coordonnées par rapport au repère $\mathcal{R}$: $(\alpha, 0)$ avec α un nombre réel différent de 0 et de 1 (puisque $A_{14} \neq A_{12}$ et $A_{14} \neq A_{13}$. De même considérons $(0, \beta)$ les coordonnées du point A_{24} avec $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Ces deux nombres réels α et β sont les deux seuls paramètres dont nous avons besoin pour cet exercice.
La droite D_4 passe par les points $A_{14}(\alpha, 0)$ et $A_{24}(0, \beta)$, elle a donc pour équation $\beta x + \alpha y = \alpha\beta$.
Le point A_{34} est l'intersection des droites D_3 et D_4 ses coordonnées sont donc solution du système

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ \beta x + \alpha y = \alpha\beta \end{cases} \iff \begin{cases} (\alpha - \beta)x = \alpha(1 - \beta) & (\alpha L_1 - L_2) \\ (\beta - \alpha)y = \beta(1 - \alpha) & (\beta L_1 - L_2). \end{cases}$$

Nous remarquons que si $\alpha = \beta$ alors les droites D_4 et D_3 sont parallèles ce qui est exclu. Nous obtenons donc les coordonnées :

$$A_{34}\left(\frac{\alpha(1-\beta)}{\alpha-\beta}, \frac{\beta(\alpha-1)}{\alpha-\beta}\right).$$

Nous pouvons alors calculer les coordonnées des milieux des diagonales : I de $[A_{12}A_{34}]$, J de $[A_{13}A_{24}]$ et K de $[A_{14}A_{23}]$:

$$I\left(\frac{\alpha(1-\beta)}{2(\alpha-\beta)}, \frac{\beta(\alpha-1)}{2(\alpha-\beta)}\right), \quad J\left(\frac{1}{2}, \frac{\beta}{2}\right) \text{ et } K\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ donc } 2\overrightarrow{JK}\left(\alpha - 1, 1 - \beta\right).$$

La droite (JK) a donc pour équation $(\beta - 1)x + (\alpha - 1)y = \frac{1}{2}(\alpha\beta - 1)$ et nous constatons que les coordonnées de I satisfont cette équation :

$$(\beta-1)\frac{\alpha(1-\beta)}{2(\alpha-\beta)} + (\alpha-1)\frac{\beta(\alpha-1)}{2(\alpha-\beta)} = \frac{-\alpha(\beta^2-2\beta+1)+\beta(\alpha^2-2\alpha+1)}{2(\alpha-\beta)} = \frac{-\alpha\beta^2+\alpha^2\beta-\alpha+\beta}{2(\alpha-\beta)}$$

$$= \frac{(\alpha-\beta)\alpha\beta-\alpha+\beta}{2(\alpha-\beta)} = \frac{1}{2}(\alpha\beta-1).$$

Nous avons donc démontré que les milieux I, J et K des diagonales sont alignés.

Exercice V. Soit (E) l'ensemble d'équation cartésienne $2x^2 + 5xy + 3y^2 - 3x - 2y - 5 = 0$.
1. Trouver un point A du plan tel que dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$ l'équation de (E) n'a pas de terme de degré 1.

Consiédérons le point A de coordonnées (a, b). Soit M un point du plan de coordonnées (x, y) dans le repère initiale et de coordonnées (X, Y) dans le nouveau repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$. Alors $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$ donc $x = X + a$ et $y = Y + b$. En substituant dans l'équation nous obtenons :

$$2(X+a)^2 + 5(X+a)(Y+b) + 3(Y+b)^2 - 3(X+a) - 2(Y+b) - 5 = 0$$

$$\iff 2X^2 + 5XY + 3Y^2 + (4a + 5b - 3)X + (6b + 5a - 2)Y + 2a^2 + 5ab + 3b^2 - 3a - 2b - 5 = 0$$

Nous choisissons donc a et b pour annuler les coefficients des termes de degré 1 :

$$\begin{cases} 4a + 5b - 3 = 0 \\ 6b + 5a - 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4a + 5b - 3 = 0 \\ -b + 7 = 0 \ (4L_2 - 5L_1) \end{cases} \iff \begin{cases} a = -8 \\ b = 7 \end{cases}$$

Nous considérons donc le point A de coordonnées $(-8, 7)$. Nous calculons le terme constant

$$2a^2 + 5ab + 3b^2 - 3a - 2b - 5 = 128 - 280 + 147 + 24 - 14 - 5 = 0.$$

L'équation de (E) dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$ est donc $2X^2 + 5XY + 3Y^2 = 0$.

2. Faire disparaître le double produit pour faire apparaître la différence de deux carrés. Puis montrer que (E) est une réunion de deux droites.

Calculons :

$$2X^2 + 5XY + 3Y^2 = 2(X + \frac{5}{4}Y)^2 - \frac{25}{8}Y^2 + 3Y^2 = 2(X + \frac{5}{4}Y)^2 - \frac{1}{8}Y^2$$

$$= 2\left((X + \frac{5}{4}Y) - \frac{1}{4}Y\right)\left((X + \frac{5}{4}Y) + \frac{1}{4}Y\right) = (X+Y)(2X+3Y).$$

L'équation de (E) dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$ est donc $(X+Y)(2X+3Y) = 0 \iff X+Y = O$ ou $2X+3Y = 0$. L'ensemble (E) est donc la réunion des deux droites d'équations $\mathcal{D}_1 : X+Y = 0$ et $\mathcal{D}_2 : 2X+3Y = 0$ (par rapport au repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$).

3. Donner les équations de ces deux droites dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. En déduire une factorisation de l'équation initiale.

Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ passent par A. En utilisant les formules de changement de repère : $X = x-a = x+8$ et $Y = y-b = y-7$ nous obtenons leurs équations dans l'ancien repère :

$$\mathcal{D}_1 : x+y+1 = 0 \text{ et } \mathcal{D}_2 : 2x+3y-5 = 0.$$

Nous constatons alors que

$$(x+y+1)(2x+3y-5) = 2x^2 + 5xy + 3y^2 - 3x - 2y - 5$$

et nous reconnaissons l'équation initiale de (E).

Exercice VI. Parbole équidistante d'une droite et d'un point. Dans le plan euclidient muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère la droite $\mathcal{D} : 3x + 4y - 2 = 0$ et le point $F(5, 3)$.
1. Faire une figure.
2. Déterminer les coordonnées du point H projeté orthogonal de F sur $\mathcal{D}$.

$H(2, -1)$

3. Rappeler la formule qui donne la distance d'un point $M(x_0, y_0)$ à la droite $\mathcal{D}$.
4. Donner une équation cartésienne de l'ensemble $\mathcal{P}$ des points équidistants de $\mathcal{D}$ et de F.
On considère maintenant le point $\Omega(\frac{7}{2}, 1)$ et les vecteurs $\vec{u}_1$ de coordonnées $\frac{1}{5}(4, -3)$ et $\vec{u}_2$ de coordonnées $\frac{1}{5}(3, 4)$.
5. Démontrer que le repère $\mathcal{R}' = (\Omega, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est orthonormé.
6. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{HF}$ en fonction de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$. En déduire les coordonnées de F et de H par rapport au repère $\mathcal{R}'$.
7. Donner une équation de la droite $\mathcal{D}$ par rapport au repère $\mathcal{R}'$.
8. Donner l'équation de $\mathcal{P}$ par rapport au repère $\mathcal{R}'$.
9. Conclure en donnant la nature de $\mathcal{P}$.

Exercice VII. Hyperboloïde équidistant de deux droites non-coplanaires.
1. Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites non parallèles de l'espace euclidien.
a. Démontrer qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire (c'est-à-dire orthogonale et sécante) à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. *(Vous pourrez considérer le plan contenant $\mathcal{D}$ et perpendiculaire à $\mathcal{D}'$ et son intersection avec $\mathcal{D}'$.)*
Soit $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ des vecteurs unitaires de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ respectivement. Soit $\vec{i} = \frac{1}{\|\vec{u}+\vec{u}'\|}(\vec{u}+\vec{u}')$ et $\vec{j} = \frac{1}{\|\vec{u}-\vec{u}'\|}(\vec{u}-\vec{u}')$.
Soit $\vec{k}$ un vecteur directeur unitaire de Δ.
b. Démontrer que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée de l'espace.
c. Donner les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par rapport à cette base.
Soit A et B les intersections de Δ avec $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ respectivement. Soit O le milieu de $[AB]$. On suppose que $\vec{k} = \frac{1}{\|\overrightarrow{AB}\|}\overrightarrow{AB}$.

d. Démontrer que dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ on a les équations suivantes :

$$\mathcal{D} : \left\{ \begin{array}{l} y = \alpha x \\ z = h \end{array} \right. \quad , \quad \mathcal{D}' : \left\{ \begin{array}{l} y = -\alpha x \\ z = -h \end{array} \right. \quad \text{et } \Delta : x = y = 0. \text{ où } \alpha = \frac{\|\vec{u}-\vec{u}'\|}{\|\vec{u}+\vec{u}'\|} \text{ et } h = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|$$

e. Soit M un point de l'espace de coordonnées (x,y,z) par rapport au repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Démontrer que

$$d(O,\mathcal{D})^2 = \frac{(y-\alpha x)^2}{1+\alpha^2} + (z-h)^2.$$

f. En déduire que l'ensemble $\mathcal{H}$ des points de l'espace équidistants des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ a pour équation

$$\mathcal{H} : hz = -\frac{\alpha}{1+\alpha^2}xy.$$

Exercice VIII. Dans l'espace euclidien muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ on considère les droites

$$\mathcal{D} : \left\{ \begin{array}{l} x - y - z + 1 = 0 \\ x + y + 3 = 0 \end{array} \right. \quad , \quad \mathcal{D}' : \left\{ \begin{array}{l} x = t - 1 \\ y = 2t + 1 \\ z = t \end{array} \right. \qquad t \in \mathbb{R}$$

1. Démontrer que ces deux droites ne sont pas coplanaires.

Calculons des vecteurs directeurs de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$:

$$\vec{u} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les droites ne sont parallèles. Vérifions que leur intersection est vide. Un point M appartient à la fois à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} (t-1) - (2t+1) - t + 1 = 0 \\ (t-1) + (2t+1) + 3 = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} -2t - 1 = 0 \\ 3t + 3 = 0 \end{array} \right.$$

Ce système n'a pas de solution donc les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont disjointes et non-parallèles : elles sont donc non-coplanaires.

2. Déterminer une équation de l'ensemble $\mathcal{H}$ des points M de l'espace équidistants de ces deux droites.

Nous remarquons que les plans dont les équations définissent $\mathcal{D}$ sont perpendiculaires :

$$\mathcal{P}_1 : x - y - z + 1 = 0 \text{ et } \mathcal{P}_2 : x + y + 3 = 0.$$

Le théorème de Pythagore nous permet alors de calculer la distance de tout point $M(x, y, z)$ à $\mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} d(M,\mathcal{D})^2 = d(M,\mathcal{P}_1)^2 + d(M,\mathcal{P}_2)^2 &= \frac{(x-y-z+1)^2}{3} + \frac{(x+y+3)^2}{2} \\ &= \frac{5x^2+5y^2+2z^2+2xy-4xz+4yz+22x+14y-4z+29}{6}. \end{aligned}$$

Pour la distance à la droite $\mathcal{D}'$, nous cherchons le projeté H de M sur $\mathcal{D}'$ c'est-à-dire un $t \in R$ tel que $\overrightarrow{HM}$ soit orthogonal à $\vec{u}'$:

$$0 = \overrightarrow{HM} \cdot \vec{u}' = \begin{pmatrix} x-(t-1) \\ y-(2t+1) \\ z-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (x-t+1) + 2(y-2t-1) + z - t \iff 6t = x + 2y + z - 1$$

En utilisant le projeté orthogonal nous obtenons :

$$\begin{aligned} d(M,\mathcal{D}')^2 = HM^2 &= \left(x - (\frac{x+2y+z-1}{6} - 1)\right)^2 + \left(y - (\frac{2}{6}(x+2y+z-1)+1)\right)^2 + \left(z - \frac{x+2y+z-1}{6}\right)^2 \\ &= \frac{1}{36}\,(5\,x-2\,y-z+7)^2 + \frac{1}{36}\,(x+2\,y-5\,z-1)^2 + \frac{1}{9}\,(x-y+z+2)^2 \\ &= \frac{1}{6}\left(5x^2+2y^2+5z^2-4xy-2xz-4yz+14x-8y+2z+11\right) \end{aligned}$$

Une équation de $\mathcal{H}$ est donc

$$5x^2+5y^2+2z^2+2xy-4xz+4yz+22x+14y-4z+29 = 5x^2+2y^2+5z^2-4xy-2xz-4yz+14x-8y+2z+11$$

$$\iff 3y^2 - 3z^2 + 6xy - 2xz + 8yz + 8x + 22y - 6z + 18 = 0$$

Bonus spécial pour celles et ceux qui arrivent à tracer ces hyperboloïdes en 3 dimension avec Geogebra ou Sage.