Faculté des sciences
Université d'Aix-Marseille

Capes blanc
jeudi 17 décembre 2020

☐ Aix-Montperrin
☐ Luminy
☐ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert
☒ Corona-confinée

Master Meef mathématiques, 1re année, T. Coulbois

Épreuve de cinq heures (avec une partie algèbre de B. MOSSÉ et une partie géométrie), réalisée à la maison en temps de pandémie de coronavirus. Il est demandé aux étudiant-es, autant qu'il leur est possible, de composer ces sujets dans des conditions ressemblant à celles du concours. En particulier, vous ne devez pas vous servir de Geogebra, ni d'un logiciel de calcul formel. Ne consultez pas vos notes de cours, ni vos livres, ne communiquez pas avec vos camarades. N'utilisez l'ordinateur que pour lire ce sujet et après l'épreuve pour déposer vos copies sur Ametice. Essayez de rester concentré-e pendant cinq heures, sans pause familiale, cuisinage, cigarettes...

L'usage de la calculatrice est autorisée.

Les parties A et B sont indépendantes.

A. Une transformation affine, un cercle et une ellipse

On rapporte le plan à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (0, A, B)$. On considère aussi le point C quatrième sommet du carré $OACB$ ainsi que le milieu I de $[AB]$ et le cercle $\mathcal{C}$ inscrit dans le carré.
Ce problème est un problème de **géométrie**, le correcteur attend et évaluera vos figures, soignées, précises, élégantes et colorées.
À tout point $M(x, y)$ du plan on associe le point $f(M) = M'$ de coordonnées (x', y') telles que

$$\begin{cases} x' = x - \frac{4}{5}y + \frac{4}{5} \\ y' = -\frac{3}{5}y + \frac{8}{5} \end{cases}$$

1. Première étude de f.
a. Déterminez les images des points O, A, B et C par la transformation f.
b. Déduisez-en que l'image du carré $OACB$ est un losange.
c. Déterminez les points fixes de f.
d. Démontrez que f est une bijection du plan.
e. Déterminez l'image $f(\mathcal{D})$ de la droite $\mathcal{D} : 3x - 4y - 2 = 0$

2. Un cercle et une tangente.
a. Donnez une équation du cercle $\mathcal{C}$ inscrit dans le carré $OACB$ (on n'attend pas de justification).
b. Démontrez que le cercle $\mathcal{C}$ est tangent à la droite $\mathcal{D}$.

3. Image du cercle par la transformation.
On note $\mathcal{E}$ l'image du cercle $\mathcal{C}$ par la transformation f :

$$\mathcal{E} = f(\mathcal{C}) = \{f(M) \mid M \in \mathcal{C}\}.$$

a. Placez les images des milieux des quatre côtés du carré $OACB$
b. Placez l'image $T' = f(T)$ du point $T(\frac{4}{5}, \frac{1}{10})$
c. Démontrez qu'une équation cartésienne de $\mathcal{E}$ est :

$$M'(x', y') \in \mathcal{E} \iff x'^2 - \frac{8}{3}\,x'y' + \frac{41}{9}\,y'^2 + \frac{5}{3}\,x' - \frac{85}{9}\,y' + \frac{185}{36} = 0.$$

4. Changement de repère.
a. Soit $I' = f(I)$, donnez une équation cartésienne de $\mathcal{E}$ dans le repère $\mathcal{R}_1 = (I', \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.
b. On considère les vecteurs $\vec{u}(1, -3)$ et $\vec{v}(3, 1)$. Démontrez qu'une équation cartésienne de $\mathcal{E}$ dans le repère $\mathcal{R}_2 = (I', \vec{u}, \vec{v})$ est

$$\mathcal{E} : \quad x_2^2 + \frac{y_2^2}{9} = \frac{1}{200}.$$

c. Tracez les axes du repère $\mathcal{R}_2$ et esquissez l'ensemble $\mathcal{E}$.

B. Étude de certaines transformations affines

Pour un espace affine $\mathcal{E}$, un point $\Omega \in \mathcal{E}$ et un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, l'homothétie de centre Ω et de rapport λ, notée $h_{\Omega,\lambda}$, est la transformation de $\mathcal{E}$ qui à tout point M associe le point $M' = h_{\Omega,\lambda}(M)$ défini par $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$.
Pour un vecteur $\vec{u}$, la translation de vecteur $\vec{u}$, notée $t_{\vec{u}}$, est la transformation de $\mathcal{E}$ qui à tout point M associe le point $M' = t_{\vec{u}}(M)$ défini par $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.
On dit que deux triplets de points (A, B, C) et (A', B', C'), chacun formé de trois points alignés et deux à deux distincts, sont dans le même ordre si

- *$A \in [BC]$ et $A' \in [B'C']$;*
- *ou si $B \in [AC]$ et $B' \in [A'C']$;*
- *ou si $C \in [AB]$ et $C' \in [A'B']$.*

1. Transformations affines de la droite. Soit $\mathcal{D}$ une droite affine.
a. Démontrer que les transformations affines de $\mathcal{D}$ sont les homothéties et les translations.
b. Soit f une transformation affine de $\mathcal{D}$, soit (A, B, C) un triplet de points de $\mathcal{D}$ deux à deux distincts et $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ et $C' = f(C)$ les images. On suppose que A', B' et C' sont deux à deux distincts. Démontrer que les triplets (A, B, C) et (A', B', C') sont dans le même ordre et que

$$\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}.$$

c. Réciproquement, soit (A, B, C) et (A', B', C') deux triplets de points de $\mathcal{D}$, chacun formé de trois points deux à deux distincts. On suppose que (A, B, C) et (A', B', C') sont dans le même ordre et que $\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}$. Démontrer qu'il existe une transformation affine f de la droite $\mathcal{D}$ telle que $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ et $C' = f(C)$.

2. Transformations affines du plan. Soit maintenant $\mathcal{P}$ un plan affine.
Soit A, B et C trois points de $\mathcal{P}$ non alignés. Soit f une transformation affine de $\mathcal{P}$ et les images des trois points :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \xrightarrow{f} & \mathcal{P} \\ A & \mapsto & f(A) = A' \\ B & \mapsto & f(B) = B' \\ C & \mapsto & f(C) = C' \end{array}$$

a. On suppose dans cette question que A', B' et C' ne sont pas alignés. Soit M un point de $\mathcal{P}$ de coordonnées (x, y) par rapport au repère $\mathcal{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Donner les coordonnées de $M' = f(M)$ par rapport au repère $\mathcal{R}' = (A', \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$.
b. Démontrer que l'application affine f est complètement déterminée par les images A', B' et C'.
On suppose désormais que A', B' et C' sont alignés et deux à deux distincts. On appelle $\mathcal{D}$ la droite qui contient ces trois points.
c. Démontrer que l'image de f est la droite $\mathcal{D}$.

d. Démontrer qu'il existe un unique point C_0 de la droite (AB) tel que les triplets (A, B, C_0) et (A', B', C') sont dans le même ordre et $\frac{AC_0}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}$.
On suppose désormais que la droite (CC_0) n'est pas parallèle à la droite $\mathcal{D}$. On considère la projection p sur la droite $\mathcal{D}$ parallèlement à la droite (CC_0) et les images $A'' = p(A)$, $B'' = p(B)$ et $C'' = p(C)$.
e. Démontrez que (A'', B'', C'') est un triplet de points deux à deux distincts dans le même ordre que (A', B', C') et tels que $\frac{A''C''}{A''B''} = \frac{A'C'}{A'B'}$.
f. En utilisant les questions précédentes en déduire qu'il existe une application affine g de la droite $\mathcal{D}$ telle que $f = g \circ p$.