Exercices de géométrie

Dans le plan rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$:

1. Donner une équation de la droite $\mathcal{D}$ passant par les points $A(1,2)$ et $B(-1,-1)$.
2. Déterminer le point C intersection de la droite $\mathcal{D}$ avec la droite Δ d'équation $x-y+2=0$.
3. Pour un paramètre réel m, préciser la position relative (sécantes ? parallèles ? confondues ? perpendiculaires ?) des droites

$$\mathcal{D}_m : mx+3y-6-m=0 \quad \text{et} \quad \Delta_m : -x+(2-m)y+m=0.$$

Barycentres

Début du premier écrit du Capes *de 2020.*

Notations
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
On se place dans un plan affine euclidien $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$. On note $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ le plan vectoriel et $\mathcal{B}$ la base $(\vec{i},\vec{j})$.

Définitions
Un point pondéré est un couple (M,α), où M est un point de $\mathcal{P}$ et α un nombre réel.
Pour tout entier naturel n non nul, un système de $n+1$ points pondérés est un $(n+1)$-uplet $((P_0,\alpha_0),\dots,(P_n,\alpha_n))$. Le poids total de ce système de points pondérés est

$$\alpha=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k.$$

I. Existence et caractérisation

Soit n un entier naturel non nul et $((P_0,\alpha_0),\dots,(P_n,\alpha_n))$ un système de $n+1$ points pondérés de poids total α.

1. On note f l'application de $\mathcal{P}$ dans $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ qui à tout point M de $\mathcal{P}$ associe le vecteur

$$f(M)=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\overrightarrow{MP_i}.$$

a. Soient M et N deux points de $\mathcal{P}$. Démontrer l'égalité vectorielle

$$f(N)=f(M)+\alpha\overrightarrow{NM}.$$

b. Démontrer que, si $\alpha\neq 0$, alors f est injective et surjective.

c. En déduire que f est bijective si et seulement si $\alpha \neq 0$.

2. On suppose α non nul. Montrer qu'il existe un unique point G tel que

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GP_i} = \vec{0}.$$

Ce point G est appelé barycentre du système de points pondérés $((P_i, \alpha_i))_{0 \leq i \leq n}$. On note

$$G = \text{bar}((P_0, \alpha_0), ..., (P_n, \alpha_n)).$$

3. On suppose que $\alpha \neq 0$ et on note G le barycentre du système $((P_i, \alpha_i))_{0 \leq i \leq n}$. Montrer que, pour tout point M de $\mathcal{P}$,

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MP_i} = \alpha \overrightarrow{MG}.$$

II. Barycentre de deux points

Soient P_0, P_1 deux points distincts du plan $\mathcal{P}$.

1. Quel est le barycentre du système de points pondérés $((P_0, 1), (P_1, 1))$?

2. Démontrer que, pour tout nombre réel t, le barycentre du système de points pondérés $((P_0, t), (P_1, 1 - t))$ appartient à la droite (P_0P_1).

3. Soit M un point de la droite (P_0P_1).

a. Démontrer qu'il existe un unique nombre réel t tel que M soit le barycentre du système de points pondérés $((P_0, t), (P_1, 1 - t))$.

b. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur t pour que M soit un point du segment$[P_0P_1]$.

III. Barycentres alignés

Soient P_0, P_1 et P_2 trois points non alignés du plan $\mathcal{P}$. Soient G, G' et G'' les barycentres des systèmes de points pondérés :

$$G = \text{bar}((P_0, \alpha_0), (P_1, \alpha_1), (P_2, \alpha_2)),$$

$$G' = \text{bar}((P_0, \alpha'_0), (P_1, \alpha'_1), (P_2, \alpha'_2)) \text{ et}$$

$$G'' = \text{bar}((P_0, \alpha''_0), (P_1, \alpha''_1), (P_2, \alpha''_2))$$

de poids totaux non nuls α, α' et α'' respectivement.

Démontrer que les points G, G' et G'' sont alignés si, et seulement si, $\begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha'_0 & \alpha'_1 & \alpha'_2 \\ \alpha''_0 & \alpha''_1 & \alpha''_2 \end{vmatrix} = 0.$

Vous pourrez exprimer les trois vecteurs $\overrightarrow{P_0G}$, $\overrightarrow{P_0G'}$ et $\overrightarrow{P_0G''}$ en fonction de $\overrightarrow{P_0P_1}$ et $\overrightarrow{P_0P_2}$.