

Épreuve de cinq heures (avec une partie algèbre de B. MOSSÉ et une partie géométrie), réalisée à la maison en temps de pandémie de coronavirus. Il est demandé aux étudiant-es, autant qu'il leur est possible, de composer ces sujets dans des conditions ressemblant à celles du concours. En particulier, vous ne devez pas vous servir de Geogebra, ni d'un logiciel de calcul formel. Ne consultez pas vos notes de cours, ni vos livres, ne communiquez pas avec vos camarades. N'utilisez l'ordinateur que pour lire ce sujet et après l'épreuve pour déposer vos copies sur Ametice. Essayez de rester concentré-e pendant cinq heures, sans pause familiale, cuisinage, cigarettes...

L'usage de la calculatrice est autorisée.

Les parties A et B sont indépendantes.

A. Une transformation affine, un cercle et une ellipse

On rapporte le plan à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, A, B)$. On considère aussi le point C quatrième sommet du carré $OACB$ ainsi que le milieu I de $[AB]$ et le cercle $\mathcal{C}$ inscrit dans le carré.

Ce problème est un problème de **géométrie**, le correcteur attend et évaluera vos figures, soignées, précises, élégantes et colorées.

À tout point $M(x, y)$ du plan on associe le point $f(M) = M'$ de coordonnées (x', y') telles que

$$\begin{cases} x' = x - \frac{4}{5}y + \frac{4}{5} \\ y' = -\frac{3}{5}y + \frac{8}{5} \end{cases}$$

1. Première étude de f .

a. Déterminez les images des points O , A , B et C par la transformation f .

Par un rapide calcul, nous obtenons :

$$\begin{aligned} O(0, 0) &\xrightarrow{f} O'\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right) \\ A(1, 0) &\mapsto A'\left(\frac{9}{5}, \frac{8}{5}\right) \\ B(0, 1) &\mapsto B'(0, 1) = B \\ C(1, 1) &\mapsto C'(1, 1) = C \end{aligned}$$

b. Dédisez-en que l'image du carré $OACB$ est un losange.

En calculant les coordonnées nous obtenons que les vecteurs $\overrightarrow{O'A'}(1,0) = \overrightarrow{B'C'}(1,0)$ sont égaux. Le quadrilatère $O'A'C'B'$ est donc un parallélogramme. De plus les diagonales $(O'C')$ et $(A'B')$ sont perpendiculaires car les vecteurs $\overrightarrow{O'C'}(\frac{1}{5}, -\frac{3}{5})$ et $\overrightarrow{A'B'}(-\frac{9}{5}, -\frac{3}{5})$ sont orthogonaux (leur produit scalaire $\overrightarrow{O'C'} \cdot \overrightarrow{A'B'} = \frac{1}{5} \times (-\frac{9}{5}) - \frac{3}{5} \times (-\frac{3}{5}) = 0$). Le quadrilatère $O'A'C'B'$ est un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires, c'est donc un losange.

c. Déterminez les points fixes de f .

En partant de l'expression de f en coordonnées nous déterminons les points fixes $M(x, y)$ de f :

$$M = f(M) \iff \begin{cases} x = x - \frac{4}{5}y + \frac{4}{5} \\ y = -\frac{3}{5}y + \frac{8}{5} \end{cases} \iff y = 1.$$

L'ensemble des points fixes de la transformation affine f est la droite (BC) d'équation $y = 1$.

d. Démontrez que f est une bijection du plan.

Pour un point $M(x, y)$ d'image par $f : f(M) = M'(x', y')$ nous pouvons calculer :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x' = x - \frac{4}{5}y + \frac{4}{5} \\ y' = -\frac{3}{5}y + \frac{8}{5} \end{cases} &\iff \begin{cases} x = x' + \frac{4}{5}y - \frac{4}{5} \\ y = -\frac{5}{3}y' + \frac{8}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} x = x' + \frac{4}{5}(-\frac{5}{3}y' + \frac{8}{3}) - \frac{4}{5} \\ y = -\frac{5}{3}y' + \frac{8}{3} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = x' - \frac{4}{3}y' + \frac{4}{3} \\ y = -\frac{5}{3}y' + \frac{8}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Ce qui démontre que f possède une bijection réciproque et donc que f est bijective.

e. Déterminez l'image $f(\mathcal{D})$ de la droite $\mathcal{D} : 3x - 4y - 2 = 0$

Grâce aux calculs de la question précédente nous obtenons que pour tout point $M(x, y)$ du plan d'image $M'(x', y')$ par f :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} &\iff 3x - 4y - 2 = 0 \iff 3(x' - \frac{4}{3}y' + \frac{4}{3}) - 4(-\frac{5}{3}y' + \frac{8}{3}) - 2 = 0 \\ &\iff 3x' + \frac{8}{3}y' - \frac{26}{3} = 0. \end{aligned}$$

L'image $\mathcal{D}' = f(\mathcal{D})$ par f de la droite $\mathcal{D}$ est donc la droite $\mathcal{D}'$ d'équation :

$$\mathcal{D}' : 9x' + 8y' - 26 = 0.$$

2. Un cercle et une tangente.

a. Donnez une équation du cercle $\mathcal{C}$ inscrit dans le carré $OACB$ (on n'attend pas de justification).

Le cercle $\mathcal{C}$ a pour centre $I(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et rayon $\frac{1}{2}$ et donc pour équation :

$$\mathcal{C} : (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}.$$

b. Démontrez que le cercle $\mathcal{C}$ est tangent à la droite $\mathcal{D}$.

Soit T le point tel que $\overrightarrow{IT}$ est colinéaire au vecteur $\vec{n}(3, -4)$ normal à la droite $\mathcal{D}$ et de norme $\frac{1}{2}$ (il y a deux tels points T , d'après la figure nous choisissons celui :

$$\overrightarrow{IT} = \frac{1}{2} \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{1}{10} \vec{n} \iff T\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{10}, \frac{1}{2} - \frac{4}{10}\right) \iff T\left(\frac{4}{5}, \frac{1}{10}\right)$$

Nous constatons en substituant dans l'équation que ce point appartient à la droite $\mathcal{D}$:

$$3\left(\frac{4}{5}\right) - 4\left(\frac{1}{10}\right) - 2 = \frac{12}{5} - \frac{2}{5} - 2 = 0 \text{ donc } T \in \mathcal{D}.$$

Le segment $[IT]$ est donc un rayon de $\mathcal{C}$, perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}$ au point T . Ce qui démontre que la droite $\mathcal{D}$ est tangente au cercle $\mathcal{C}$.

3. Image du cercle par la transformation.

On note $\mathcal{E}$ l'image du cercle $\mathcal{C}$ par la transformation f :

$$\mathcal{E} = f(\mathcal{C}) = \{f(M) \mid M \in \mathcal{C}\}.$$

a. Placez les images des milieux des quatre côtés du carré $OACB$

À nouveau, nous utilisons l'expression analytique de f pour déterminer les images des milieux :

$$\begin{aligned} J\left(\frac{1}{2}, 0\right) &\xrightarrow{f} J'\left(\frac{13}{10}, \frac{8}{5}\right) \\ K\left(1, \frac{1}{2}\right) &\mapsto K'\left(\frac{7}{5}, \frac{13}{10}\right) \\ L\left(\frac{1}{2}, 1\right) &\mapsto L'\left(\frac{1}{2}, 1\right) = L \\ N\left(0, \frac{1}{2}\right) &\mapsto N'\left(\frac{4}{10}, \frac{13}{10}\right) \end{aligned}$$

Bien sûr, puisque f est une transformation affine, J' est le milieu de $[O'A']$, K' est le milieu de $[A'C']$ et M' est le milieu de $[O'B']$.

b. Placez l'image $T' = f(T)$ du point $T\left(\frac{76}{50}, \frac{77}{50}\right)$.

Les coordonnées de T' sont $T'\left(\frac{76}{50}, \frac{77}{50}\right)$

c. Démontrez qu'une équation cartésienne de $\mathcal{E}$ est :

$$M'(x', y') \in \mathcal{E} \iff x'^2 - \frac{8}{3}x'y' + \frac{41}{9}y'^2 + \frac{5}{3}x' - \frac{85}{9}y' + \frac{185}{36} = 0.$$

Pour tout point $M(x, y)$ d'image $f(M) = M'(x', y')$ en substituant, grâce aux formules de la question 1.d, nous obtenons :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\iff M' \in \mathcal{E} \iff (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \\ &\iff ((x' - \frac{4}{3}y' + \frac{4}{3}) - \frac{1}{2})^2 + ((-\frac{5}{3}y' + \frac{8}{3}) - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \iff (x' - \frac{4}{3}y' + \frac{5}{6})^2 + (-\frac{5}{3}y' + \frac{13}{6})^2 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Nous développons les carrés :

$$\begin{aligned} x'^2 + \frac{16}{9}y'^2 - \frac{8}{3}x'y' + \frac{5}{3}x' - \frac{20}{9}y' + \frac{25}{36} + \frac{25}{9}y'^2 - \frac{65}{9}y' + \frac{169}{36} &= \frac{1}{4} \\ \iff x'^2 - \frac{8}{3}x'y' + \frac{41}{9}y'^2 + \frac{5}{3}x' - \frac{85}{9}y' + \frac{185}{36} &= 0 \end{aligned}$$

4. Changement de repère.

a. Soit $I' = f(I)$, donnez une équation cartésienne de $\mathcal{E}$ par rapport au repère $\mathcal{R}_1 = (I', \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

En utilisant la définition analytique de f , le point I' a pour coordonnées $I'(\frac{9}{10}, \frac{13}{10})$. Soit M un point du plan de coordonnées (x, y) par rapport au repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ et de coordonnées (x_1, y_1) par rapport au repère $\mathcal{R}_1$. Alors par définition des coordonnées, puis en utilisant la relation de CHASLES :

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OI'} + \overrightarrow{IM} = (\frac{9}{10}\overrightarrow{OA} + \frac{13}{10}\overrightarrow{OB}) + x_1\overrightarrow{OA} + y_1\overrightarrow{OB}$$

Comme les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont linéairement indépendants, nous obtenons :

$$\begin{cases} x = x_1 + \frac{9}{10} \\ y = y_1 + \frac{13}{10} \end{cases}.$$

Nous remplaçons maintenant dans l'équation de $\mathcal{E}$:

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{E} &\iff x^2 - \frac{8}{3}xy + \frac{41}{9}y^2 + \frac{5}{3}x - \frac{85}{9}y + \frac{185}{36} = 0 \\ \iff (x_1 + \frac{9}{10})^2 - \frac{8}{3}(x_1 + \frac{9}{10})(y_1 + \frac{13}{10}) + \frac{41}{9}(y_1 + \frac{13}{10})^2 + \frac{5}{3}(x_1 + \frac{9}{10}) - \frac{85}{9}(y_1 + \frac{13}{10}) + \frac{185}{36} &= 0 \\ \iff x_1^2 - \frac{8}{3}x_1y_1 + \frac{41}{9}y_1^2 &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Une équation de $\mathcal{E}$ par rapport au repère $\mathcal{R}_1$ est donc :

$$\mathcal{E} : x_1^2 - \frac{8}{3}x_1y_1 + \frac{41}{9}y_1^2 = \frac{1}{4}$$

b. On considère les vecteurs $\vec{u}(1, -3)$ et $\vec{v}(3, 1)$. Démontrez qu'une équation cartésienne de

$\mathcal{E}$ par rapport au repère $\mathcal{R}_2 = (I', \vec{u}, \vec{v})$ est

$$\mathcal{E} : x_2^2 + \frac{y_2^2}{9} = \frac{1}{200}.$$

Nous écrivons les formules de changement de repère : soit M un point de coordonnées (x_1, y_1) par rapport au repère $\mathcal{R}_1$ et de coordonnées (x_2, y_2) par rapport au repère $\mathcal{R}_2$. Alors par définition des coordonnées :

$$\overrightarrow{IM} = x_2 \vec{u} + y_2 \vec{v} = x_2(\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB}) + y_2(3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = (x_2 + 3y_2)\overrightarrow{OA} + (y_2 - 3x_2)\overrightarrow{OB} = x_1 \overrightarrow{OA} + y_1 \overrightarrow{OB}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ forment une base du plan vectoriel et donc nous pouvons identifier les coordonnées :

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + 3y_2 \\ y_1 = -3x_2 + y_2 \end{cases}.$$

Nous pouvons maintenant substituer dans l'équation de $\mathcal{E}$:

$$M \in \mathcal{E} \iff x_1^2 - \frac{8}{3} x_1 y_1 + \frac{41}{9} y_1^2 = \frac{1}{4}$$

$$\iff (x_2 + 3y_2)^2 - \frac{8}{3} (x_2 + 3y_2)(-3x_2 + y_2) + \frac{41}{9} (-3x_2 + y_2)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\iff x_2^2 + 6x_2 y_2 + 9y_2^2 - \frac{8}{3} (-3x_2^2 - 8x_2 y_2 + 3y_2^2) + \frac{41}{9} (9x_2^2 - 6x_2 y_2 + y_2^2) = \frac{1}{4}$$

$$\iff 50x_2^2 + \frac{50}{9} y_2^2 + (6 + \frac{64}{3} - \frac{41 \times 6}{9}) x_2 y_2 = \frac{1}{4}.$$

Une équation de $\mathcal{E}$ par rapport au repère $\mathcal{R}_2$ est donc

$$\mathcal{E} : x_2^2 + \frac{y_2^2}{9} = \frac{1}{200}.$$

c. Tracez les axes du repère $\mathcal{R}_2$ et esquissez l'ensemble $\mathcal{E}$.

The diagram shows a Cartesian coordinate system with x and y axes ranging from -0.2 to 3.0. Two circles are plotted: Circle D with center O at (0,0) and radius 1, and Circle D' with center O' at (1, 1.6). Several points are labeled: A, B, C on Circle D; A', B', C' on Circle D'. Lines connect A to A', B to B', and C to C'. A red line segment passes through points I' and J'. A green line segment passes through points K' and L'. Right angle symbols are shown at point T (where line OT meets circle D) and at point I' (between lines BI' and CI').

B. Étude de certaines transformations affines

Pour un espace affine $\mathcal{E}$, un point $\Omega \in \mathcal{E}$ et un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, l'homothétie de centre Ω et de rapport λ , notée $h_{\Omega, \lambda}$, est la transformation de $\mathcal{E}$ qui à tout point M associe le point $M' = h_{\Omega, \lambda}(M)$ défini par $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$.

Pour un vecteur $\vec{u}$, la translation de vecteur $\vec{u}$, notée $t_{\vec{u}}$, est la transformation de $\mathcal{E}$ qui à tout point M associe le point $M' = t_{\vec{u}}(M)$ défini par $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

On dit que deux triplets de points (A, B, C) et (A', B', C') , chacun formé de trois points alignés et deux à deux distincts, sont dans le même ordre si

- $A \in [BC]$ et $A' \in [B'C']$;
- ou si $B \in [AC]$ et $B' \in [A'C']$;
- ou si $C \in [AB]$ et $C' \in [A'B']$.

1. Transformations affines de la droite. Soit $\mathcal{D}$ une droite affine.

a. Démontrer que les transformations affines de $\mathcal{D}$ sont les homothéties et les translations.

Fixons un repère $(A, \vec{u})$ de la droite $\mathcal{D}$. En coordonnées une transformation affine s'écrit $f : x \mapsto ax + b$ où a et b sont deux nombres réels. Si $a = 1$ on reconnaît la translation de vecteur $\vec{u} = b\vec{u}$. Si $a \neq 1$, la transformation f possède un unique point fixe Ω de coordonnées $x_{\Omega} = \frac{b}{1-a}$ et pour tout point $M(x)$ d'image $f(M) = M'(ax + b)$ nous pouvons calculer la coordonnée

$$\overrightarrow{\Omega M'} : (ax + b - x_{\Omega}) = (ax + b) - (ax_{\Omega} + b) = a(x - x_{\Omega}) \Rightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\Omega M}.$$

Ce qui prouve que f est l'homothétie de centre Ω et de rapport a .

b. Soit f une transformation affine de $\mathcal{D}$, soit (A, B, C) un triplet de points de $\mathcal{D}$ deux à deux distincts et $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ et $C' = f(C)$ les images. On suppose que A' , B' et C' sont deux à deux distincts. Démontrer que les triplets (A, B, C) et (A', B', C') sont dans le même ordre et que

$$\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$ (λ est la coordonnée du point C par rapport au repère $(A, \overrightarrow{AB})$). Par définition d'une transformation affine, f est associée à une application linéaire donc $\overrightarrow{A'C'} = \lambda \overrightarrow{A'B'}$, ce qui montre l'égalité des deux rapports des longueurs à $|\lambda|$. L'ordre des triplets est aussi donné par λ :

- $\lambda \leq 0 \iff A \in [BC] \iff A' \in [B'C']$;
- $\lambda \geq 1 \iff B \in [AC] \iff B' \in [A'C']$;
- $0 \leq \lambda \leq 1 \iff C \in [AB] \iff C' \in [A'B']$.

Ce qui démontre que les triplets (A, B, C) et (A', B', C') sont dans le même ordre.

c. Réciproquement, soit (A, B, C) et (A', B', C') deux triplets de points de $\mathcal{D}$, chacun formé de trois points deux à deux distincts. On suppose que (A, B, C) et (A', B', C') sont dans le même ordre et que $\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}$. Démontrer qu'il existe une transformation affine f de la droite $\mathcal{D}$ telle que $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ et $C' = f(C)$.

Comme précédemment, les points A et B sont distincts et forment un repère de la droite donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$, comme A' et B' sont aussi distincts il existe $\lambda' \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{A'C'} = \lambda' \overrightarrow{A'B'}$. D'après l'égalité des longueurs, $|\lambda| = |\lambda'|$ et comme les deux triplets sont dans le même ordre, λ et λ' sont de même signe et donc finalement $\lambda' = \lambda$.

Soit $x_{A'}$ et $x_{B'}$ les coordonnées des points A' et B' par rapport au repère $(A, \overrightarrow{AB})$. Soit $a = x_{B'} - x_{A'}$ et $b = x_{A'}$. Considérons la transformation affine f de forme analytique : $x \mapsto ax + b$ par rapport au repère $(A, \overrightarrow{AB})$. Alors A de coordonnée 0 est envoyé sur A' , B de coordonnée 1 est envoyé sur B' . Enfin C de coordonnée λ est envoyé sur C'' de coordonnée $x_{C''} = a\lambda + b = (x_{B'} - x_{A'})\lambda + x_{A'}$. La coordonnée du vecteur $\overrightarrow{A'C''}$ par rapport à la base $\overrightarrow{AB}$ est donc $(x_{B'} - x_{A'})\lambda + x_{A'} - x_{A'} = (x_{B'} - x_{A'})\lambda$. Or $\overrightarrow{A'C'} = \lambda \overrightarrow{A'B'}$, donc $C' = C''$ est bien l'image de C par la transformation affine f .

Nous avons démontré qu'il existe bien dans ce cas une transformation affine qui envoie A sur A' , B sur B' et C sur C' .

2. Transformations affines du plan. Soit maintenant $\mathcal{P}$ un plan affine.

Soit A , B et C trois points de $\mathcal{P}$ non alignés. Soit f une transformation affine de $\mathcal{P}$ et les images des trois points :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P} & \xrightarrow{f} & \mathcal{P} \\ A & \mapsto & f(A) = A' \\ B & \mapsto & f(B) = B' \\ C & \mapsto & f(C) = C' \end{array}$$

a. On suppose dans cette question que A' , B' et C' ne sont pas alignés. Soit M un point de $\mathcal{P}$ de coordonnées (x, y) par rapport au repère $\mathcal{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Donner les coordonnées de $M' = f(M)$ par rapport au repère $\mathcal{R}' = (A', \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$.

Par définition des coordonnées : $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, en appliquant la partie linéaire $\vec{f}$ de l'application affine f nous obtenons :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A'M'} &= \overrightarrow{f(A)f(M)} = \vec{f}(\overrightarrow{AM}) = \vec{f}(x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}) = x\vec{f}(\overrightarrow{AB}) + y\vec{f}(\overrightarrow{AC}) = \\ &= x\overrightarrow{f(A)f(B)} + y\overrightarrow{f(A)f(C)} = x\overrightarrow{A'B'} + y\overrightarrow{A'C'}. \end{aligned}$$

Ce qui démontre que les coordonnées de M' par rapport au repère $\mathcal{R}'$ sont aussi (x, y) .

b. Démontrer que l'application affine f est complètement déterminée par les images A' , B' et C' .

D'après la question précédente, pour tout point M du plan les coordonnées de son image $M' = f(M)$ par rapport au repère $\mathcal{R}'$ sont égales aux coordonnées de M par rapport au repère $\mathcal{R}$. Le point M' est donc complètement déterminé par M et par $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$.

On suppose désormais que A' , B' et C' sont alignés et deux à deux distincts. On appelle $\mathcal{D}$ la droite qui contient ces trois points.

c. Démontrer que l'image de f est la droite $\mathcal{D}$.

Les calculs de la question B.1.a s'appliquent aussi lorsque A' , B' et C' sont alignés, en particulier pour tout point M du plan d'image $M' = f(M)$, le vecteur $\overrightarrow{A'M'}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{A'C'}$ donc M' est un point de la droite $\mathcal{D}$. Nous avons démontré que $f(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{D}$.

Réciproquement, pour tout point M' de la droite (AB) soit x sa coordonnée dans le repère $(A', \overrightarrow{A'B'})$, c'est-à-dire que $\overrightarrow{A'M'} = x\overrightarrow{A'B'}$, alors toujours d'après les calculs de la question B.1.a, M' est l'image du point M du plan de coordonnées $(x, 0)$ par rapport au repère $\mathcal{R}$. Ce qui démontre que M' possède un antécédant par f . Nous avons démontré que $\mathcal{D} \subseteq f(\mathcal{P})$. Par double inclusion nous avons démontré que l'image du plan est la droite $\mathcal{D}$.

d. Démontrer qu'il existe un unique point C_0 de la droite (AB) tel que les triplets (A, B, C_0) et (A', B', C') sont dans le même ordre et $\frac{AC_0}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}$.

Comme A' et B' sont deux points distincts et C' un point de la droite $\mathcal{D} = (A'B')$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{A'C'} = x\overrightarrow{A'B'}$. Soit C_0 le point du plan (et donc de la droite (AB)) tel que $\overrightarrow{AC_0} = x\overrightarrow{AB}$. Les rapports des longueurs sont alors tous les deux égaux à $|x|$ et la position de x par rapport à 0 et 1 donne l'ordre des deux triplets : (A, B, C_0) et (A', B', C') sont dans le même ordre.

Réciproquement un tel point est unique et déterminé par cette égalité vectorielle.

On suppose désormais que la droite (CC_0) n'est pas parallèle à la droite $\mathcal{D}$. On considère la projection p sur la droite $\mathcal{D}$ parallèlement à la droite (CC_0) et les images $A'' = p(A)$, $B'' = p(B)$ et $C'' = p(C)$.

e. Démontrons que (A'', B'', C'') est un triplet de points deux à deux distincts dans le même ordre que (A', B', C') et tels que $\frac{A''C''}{A''B''} = \frac{A'C'}{A'B'}$.

Nous remarquons que les points C , C_0 et C'' sont alignés et donc que $p(C_0) = C''$. Une projection est une transformation affine, sa partie linéaire conserve donc les combinaisons linéaires et en reprenant les notations de la question précédente :

$$\overrightarrow{AC_0} = x\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{A''C''} = x\overrightarrow{A''B''}.$$

Cette égalité vectorielle implique que (A, B, C_0) et (A'', B'', C'') sont alignés dans le même ordre et que $\frac{A''C''}{A''B''} = \frac{AC_0}{AB}$ (et en particulier, A'' , B'' et C'' sont deux à deux distincts).

Ici nous aurions pu utiliser directement le théorème de THALÈS en reprenant la définition d'une projection.

Par transitivité nous concluons que (A'', B'', C'') et (A', B', C') sont alignés dans le même ordre et $\frac{A''C''}{A''B''} = \frac{A'C'}{A'B'}$.

f. En utilisant les questions précédentes en déduire qu'il existe une application affine g de la droite $\mathcal{D}$ telle que $f = g \circ p$.

D'après la question B.1.c, il existe une transformation affine g de la droite $\mathcal{D}$ qui envoie le triplet (A'', B'', C'') sur (A', B', C') . En composant nous obtenons que $g \circ p$ envoie le triplet (A, B, C) sur (A', B', C') .