

Exercice I. Calculer

1. i^3 2. $(1+i)^2$ 3. $(2+i)^3$ 4. $(2-i)^3$ 5. $(1+i\sqrt{3})^3$
 6. $\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2$ 7. $\left(\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)+i\sqrt{\frac{5}{8}+\frac{\sqrt{5}}{8}}\right)^5$ 8. 2^i 9. $2^{(1+i\pi)}$

Exercice II. Décrire l'ensemble des points dont l'affixe vérifie

1. $|z-i|=2$ 2. $|z+3|=1$ 3. $\left|\frac{z-2i}{z+1}\right|=1$
 4. $z+\bar{z}=3$ 5. $(1+2i)z+(1-2i)\bar{z}=5$ 6. $(2-i)z+(2+i)\bar{z}=i$

Exercice III. Dans le plan complexe, placer les points d'affixes 1, $(1+i)$, $(1+i)^2$, $(1+i)^3$, etc.

Exercice IV. 1. Placer dans le plan complexe le point d'affixe $A(2+4i)$ et tracer le cercle unité.
 2. Quelles sont les affixes des points d'intersection de la droite (OA) et du cercle unité.
 3. Soit B le point d'affixe $(1-2\sqrt{3})+i(2+\sqrt{3})$. Montrer que le triangle OAB est équilatéral.

Exercice V. Calculer le module et l'argument des nombres

1. $1+i$ 2. $\sqrt{3}-i$ 3. $(1+i)(1-i\sqrt{3})$ 4. $\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$

Exercice VI. Décrire l'ensemble des points dont l'affixe vérifie

1. $|z-i|=2$ 2. $|z+3|=1$ 3. $\left|\frac{z-2i}{z+1}\right|=1$
 4. $z+\bar{z}=3$ 5. $(1+2i)z+(1-2i)\bar{z}=5$ 6. $(2-i)z+(2+i)\bar{z}=i$

Exercice VII. 1. Soit u un complexe de module 1. Décrire l'ensemble des points dont l'affixe est de la forme $z = \frac{u+i}{u-1}$. Vous commencerez par placer les points correspondants à $u = i, -i, -1, \dots$

2. Soit x un nombre réel. Décrire l'ensemble des points dont l'affixe est de la forme $z = \frac{x+i}{x-1}$. Vous commencerez par placer les points correspondants à $x = -2, -1, 0, 2, \dots$

3. Soit y un nombre réel. Décrire l'ensemble des points dont l'affixe est de la forme $z = \frac{iy+i}{iy-1}$. Vous commencerez par placer les points correspondants à $y = -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

Exercice VIII. Soit ω une racine n -ième de l'unité. En dérivant la formule qui donne la somme partielle d'une série géométrique, calculer $1+2\omega+3\omega^2+\dots+n\omega^{n-1}$.

Exercice IX. Linéariser : 1. $\cos^3(x)$, 2. $\sin^4(x)$, 3. $\cos^3(x)\sin^2(x)$.

Exercice X. 1. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $\frac{1-z}{1-iz}$ soit réel.

2. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $\frac{1-z}{1-iz}$ soit imaginaire pur.

Exercice XI. Soit A, B, C trois points du plan complexe d'affixes a, b et c .

1. Démontrer que ABC est un triangle équilatéral direct si et seulement si $a+jb+j^2c=0$.

2. On ne suppose pas nécessairement que ABC est équilatéral. On construit à partir de ABC les trois triangles équilatéraux de base $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$ construits à l'extérieur du premier. Montrer que les centres de gravité de ces trois triangles forment un triangle équilatéral.

Le modèle de POINCARÉ du plan hyperbolique.

Soit H le demi-plan ouvert supérieur : $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$.

Une homographie est une transformation de $\mathbb{C}$ définie par $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ où a, b, c, d sont des nombres complexes et $ad - bc \neq 0$. Attention : une homographie n'est pas nécessairement définie dans tout le plan complexe. La matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est associée à l'homographie.

1. Démontrer qu'une homographie est injective sur $\mathbb{C}$.
2. Démontrer que la matrice associée à la composée de deux homographies est le produit des deux matrices associées.

On suppose désormais que a, b, c, d sont des nombres réels que $ad - bc > 0$.

3. Démontrer que l'homographie définie une bijection de H dans H .

Les transformations de la forme $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ où a, b, c, d sont des nombres réels et $ad - bc > 0$ sont les **isométries directes** du demi-plan de POINCARÉ.

4. Démontrer que pour tout nombre complexe z_0 de H il existe une isométrie directe (c'est-à-dire une homographie avec a, b, c, d réels et $ad - bc > 0$) qui envoie z_0 sur i .
5. Déterminer toutes les isométries directes de H qui laissent i invariant.
6. Démontrer que pour tous nombres complexes z_0, z_1 de H il existe une isométrie directe qui envoie z_0 sur i et z_1 sur $\delta + i$ où δ est un nombre réel strictement positif.
7. Démontrer que δ est uniquement déterminé par z_0 et z_1 .

Le nombre δ est la **distance hyperbolique** entre z_0 et z_1 .

Une **droite** de H est soit un demi-cercle ouvert centré sur l'axe réel et inclus dans H , soit une demi-droite ouverte verticale partant de l'axe réel. On note $\mathcal{D}(H)$ l'ensemble des droites de H .

8. Soit A, B, C les points d'affixes $i, i+1, 2i$. Tracer les droites de H passant par A et B , par A et C , par B et C .
9. Démontrer que par deux points il passe une et une seule droite de H .
10. Tracer la droite de H passant par $i+3$ et $2i+6$. Remarquez que cette droite est disjointe (donc "parallèle") des droites (AB) et (AC) .

Si on prend pour définition que deux droites sont parallèles si elles sont disjointes ou confondues alors le 5^e postulat d'EUCLIDE est faux dans le plan hyperbolique.

11. Démontrer qu'une isométrie directe de H transforme une droite de H en une droite de H (vous pourrez d'abord le faire pour les cas particuliers : $z \mapsto z+c$, $z \mapsto az$ et $z \mapsto \frac{-1}{z}$. Puis vous démontrerez que toute isométrie directe peut s'écrire comme la composée d'isométries directes des trois types précédents).

L'**angle** entre deux droites de H sécantes est l'angle formé par leurs tangentes au point d'intersection.

12. Démontrer que toutes les droites perpendiculaires à la droite (AC) sont parallèles entre elles.
13. Démontrer que deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles.
14. Étant donné un point et une droite de H construire la perpendiculaire à cette droite passant par ce point (vous distinguerez les différents cas).