

## 1 Motivation et programme de travail

On s’intéresse, dans ce cours, à la simulation numérique de la récupération des hydrocarbures piégés dans un réservoir pétrolier dont les caractéristiques sont connues. Les compagnies pétrolières utilisent ce type de simulateurs afin d’optimiser leur plan de production (où faut-il creuser des puits, comment les positionner, comment injecter... pour récupérer le plus possible d’hydrocarbures). Un autre problème intéressant pour les pétroliers, et assez voisin sur le plan des modèles et de leur résolution, est la simulation numérique de la formation des bassins sédimentaires. Pour ce deuxième problème, que nous n’étudierons pas dans ce cours. L’objectif est de déterminer où sont situés les réservoirs d’hydrocarbures.

Pour créer un tel simulateur numérique, on peut décomposer le travail en trois parties :

1. Elaboration d’un modèle mathématique,
2. développement de méthodes numériques pour la résolution (approchée) du modèle mathématique,
3. écriture d’un code informatique dont les données sont les caractéristiques du réservoir et dont les résultats sont les prévisions de production en fonction des paramètres de production (localisation des puits, débits d’injection ou pression d’injection...).

Dans ce cours, le modèle mathématique est donné, sans réelle justification. On développe ensuite, en détail, les méthodes numériques suggérées pour calculer une solution approchée du modèle. Il s’agit des méthodes effectivement utilisées dans la plupart des simulateurs de réservoirs des compagnies pétrolières. Ces méthodes sont d’abord données (dans la section 3) dans un cas unidimensionnel permettant de mieux comprendre les raisons de certains choix faits pour la discrétisation du modèle et pour lequel on sait construire des solutions exactes, ce qui permet, en particulier, de tester les méthodes numériques suggérées. Enfin, dans la section 4, on développe les méthodes numériques pour le cas bidimensionnel.

Le travail personnel demandé dans ce projet est la réalisation d’un code informatique permettant la simulation numérique d’un réservoir bidimensionnel dont les caractéristiques sont données dans les sections suivantes. Bien sûr, afin que de travail soit réalisable en un temps raisonnable (c’est-à-dire compatible avec l’ensemble du travail demandé pour le master), les caractéristiques de réservoir sont simples, trop simples pour être vraiment intéressantes dans un cadre industriel, mais permettent néanmoins de mettre en évidence des particularités intéressantes de la simulation de réservoir (comme, par exemple, le problème de la prise en compte des puits).

## 2 Modèle mathématique

Le modèle mathématique est un ensemble d’Equations aux Dérivées Partielles et de conditions aux limites et initiales dont les inconnues du modèle sont solutions. On donne brièvement maintenant les paramètres décrivant le milieu poreux dans lequel sont piégés les hydrocarbures, les paramètres décrivant le fluide occupant la partie poreuse du milieu et les lois mécaniques qui nous permettent d’écrire ce modèle mathématique. Dans cette section, le modèle mathématique est encore donné de manière un peu incomplète. Des précisions (sur les termes sources dus aux puits ou sur les conditions aux limites, par exemple) seront données dans les sections suivantes.

**Milieu poreux.** Le milieu poreux est supposé fixe, c'est-à-dire qu'il ne change pas avec le temps (en fait, des modèles plus complexes prennent en compte une évolution temporelle du milieu). Il a des caractéristiques très variables selon sa nature. Cela peut être, par exemple, un grès, du sable, de l'argile... Le fluide, qui est un mélange d'eau et d'hydrocarbures sous forme liquide ou gazeuse, occupe l'ensemble des pores de ce milieu. Il est important de comprendre que l'on ne va pas faire une description fine du milieu et de l'écoulement du fluide jusqu'à l'échelle du pore, mais une description à une échelle beaucoup plus grosse que celle du pore. Une modélisation à l'échelle du pore serait beaucoup trop coûteuse. Le milieu poreux est caractérisé tout d'abord par sa perméabilité absolue, notée  $K$ , qui exprime la facilité pour le fluide, contenu dans les pores du milieu, à se déplacer, et par sa porosité  $\phi$  qui représente le volume des pores par rapport au volume total du milieu. Ces deux paramètres,  $K$  et  $\phi$  dépendent du point d'espace car la nature du milieu change avec le point d'espace considéré. Le milieu poreux est caractérisé aussi par d'autres paramètres, comme les perméabilités relatives, la pression capillaire... , que nous verrons plus loin car qu'ils dépendent aussi de la nature du fluide en place.

**Fluide.** Le fluide occupant les pores est, en général, formé de trois phases, chaque phase ayant sa propre vitesse d'écoulement (ou plutôt sa vitesse de filtration), qui sont : la phase "eau", la phase "hydrocarbures sous forme liquide" et la phase "hydrocarbures sous forme gaz". Dans ce projet, pour simplifier, on considère qu'il n'y a que deux phases : la phase "eau" et la phase "hydrocarbures sous forme liquide". On considère aussi que ces deux phases sont incompressibles (hypothèse peu réaliste pour la phase "gaz" que nous supposons ici absente). On note  $s$  la saturation de la phase "eau", c'est-à-dire la fraction du volume poreux occupée par la phase "eau". La fraction du volume poreux occupée par la phase "hydrocarbure", appelée aussi phase "huile" est donc  $(1 - s)$ . La phase eau n'est composée, en général, que d'eau mais les deux phases formées d'hydrocarbures sont composées de nombreux constituants (disons de 2 à 50, selon les modèles utilisés). La répartition d'un constituant entre les deux phases se fait selon des lois thermodynamiques. Ici, nous n'avons qu'une phase d'hydrocarbures et nous aurons aussi qu'un seul constituant hydrocarbure. Il y a donc, dans le modèle étudié ici, deux phases et deux constituants et chaque constituant n'existe que dans une phase (on peut identifier phases et constituants). Il s'agit d'un modèle appelé "immiscible". L'état de chaque phase est décrit par la saturation de la phase, sa pression et sa vitesse d'écoulement. Enfin, pour écrire les équations du modèle, nous avons aussi besoin de paramètres pour les phases, comme la viscosité de chaque phase, et de paramètres qui caractérisent l'interaction entre les phases et le milieu solide tels que les perméabilités relatives et la pression capillaire (qui est la différence de pression entre les deux phases).

**Inconnues et équations.** Comme le milieu solide est supposé fixe (et connu), les inconnues du modèle sont les quantités décrivant le fluide, c'est-à-dire la saturation, la pression et la vitesse de filtration de chaque phase. Elles seront notées  $s_w, s_o, p_w, p_o, v_w, v_o$  (le lettre  $w$  correspond à phase eau et la lettre  $o$  à la phase huile). Ces quantités dépendent du temps  $t$ , variant entre 0 et  $T$ , et du point d'espace  $x$ , appartenant au domaine du réservoir, noté  $\Omega$ . On doit maintenant donner les six équations (quatre équations scalaires et deux équations vectorielles) satisfaites pour ces six inconnues (quatre inconnues scalaires et deux inconnues vectorielles).

On obtient deux équations (scalaires) en écrivant la conservation de la masse de chaque constituant, ce qui revient ici à écrire la conservation du volume de chaque phase (car les phases sont incompressibles et chaque phase contient un et un seul constituant) :

$$\frac{\partial \phi s_w}{\partial t} + \text{div}(v_w) = h_w \text{ dans } \Omega \times ]0, T[, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \phi s_o}{\partial t} + \text{div}(v_o) = h_o \text{ dans } \Omega \times ]0, T[, \quad (2)$$

où  $h_w$  et  $h_o$  sont des termes sources, dûs aux puits. Ils seront explicités dans les sections suivantes.

Une autre équation scalaire est obtenue en remarquant que les deux phases occupent toutes les pores du

milieu, c'est-à-dire :

$$s_w + s_o = 1. \quad (3)$$

Dans les équations précédentes, on a omis la dépendance en  $(x, t)$ . Par exemple, la première équation de (1) devrait s'écrire, pour tout  $(x, t) \in \Omega \times ]0, T[$ ,  $(\partial(\phi s_w)/\partial t)(x, t) + \text{div}(v_w)(x, t) = h_w(x, t)$ . Pour être plus précis,  $\text{div}(v_w)(x, t)$  est plutôt la divergence de la fonction  $x \mapsto v_w(x, t)$  prise au point  $x$ .

Les trois équations restantes sont obtenues à partir de lois de comportement, élaborées à partir d'expériences (souvent faites en laboratoires). Une loi dite de "pression capillaire" donne que la différence de pression entre les phases est une fonction connue, notée  $p_c$ , de la saturation de l'eau (mais cette fonction dépend du milieu solide). On a donc :

$$p_w(x, t) - p_o(x, t) = p_c(x, s_w(x, t)), \quad x \in \Omega, t \in ]0, T[. \quad (4)$$

Enfin, la loi de Darcy permet de relier les vitesses  $v_w$  et  $v_o$  au gradient de la pression de chaque phase :

$$v_w = -f_w(s_w)K(\nabla p_w - \rho_w g), \quad \text{dans } \Omega \times ]0, T[, \quad (5)$$

$$v_o = -f_o(s_w)K(\nabla p_o - \rho_o g), \quad \text{dans } \Omega \times ]0, T[. \quad (6)$$

Ici aussi, on a omis la dépendance en  $(x, t)$ . La première équation devrait s'écrire, pour tout  $(x, t) \in \Omega \times ]0, T[$ ,  $v_w(x, t) = -f_w(s_w(x, t))K(x)(\nabla p_w(x, t) - \rho_w g(x))$ . Ici encore, pour être plus précis,  $\nabla p_w(x, t)$  est le gradient de fonction  $x \mapsto p_w(x, t)$  prise au point  $x$ .

Dans (5)-(6),  $f_w$  et  $f_o$  sont des fonctions connues (prise en  $s_w(x, t)$ ). Dans des modèles plus réalistes, ces fonctions peuvent aussi dépendre du point  $x$ , elles contiennent les perméabilités relatives, déjà évoquées précédemment, et les viscosités des fluides (en fait, ces viscosités dépendent aussi en général de la pression, nous n'en tiendrons pas compte ici). Les constantes  $\rho_w$  et  $\rho_o$  sont les masses volumiques des phases (supposées incompressibles) et  $g$  est le vecteur (constant) de gravité.

A ces équations, il faut ajouter des conditions initiales et des conditions aux limites (certaines quantités sont données à l'instant  $t = 0$  ou au bord du domaine) avec l'espoir que le problème soit ainsi bien posé, c'est-à-dire qu'il admette une unique solution. Dans les sections suivantes, nous essayons de calculer une solution approchée de ce problème. Dans la section 3, on étudie une situation unidimensionnelle (c'est-à-dire  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}$ ) en négligeant la pression capillaire, les termes source dûs aux puits et, dans une première partie, le terme de gravité et en supposant le milieu solide homogène. Dans la section 4, on s'intéresse à une situation bidimensionnelle (c'est-à-dire  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ ). Ici aussi, on commence par négliger la pression capillaire et le terme de gravité et par supposer que le milieu est isotrope et homogène et on modélise les puits de manière très simplifiée par des conditions aux limites. Puis, on ajoute une modélisation plus réaliste des puits, des termes de gravité et on considère un milieu hétérogène.

Bien sûr, de nombreux développements pourraient être réalisés, plus ou moins importants selon les réservoirs considérés : milieu anisotrope, pression capillaire, modèle triphasique avec thermodynamique, interaction fluide-roche (mouillabilité, fracturation hydraulique, compaction)...

## 3 Etude et résolution numérique du modèle unidimensionnel

### 3.1 Modèle unidimensionnel sans terme de gravité

On considère ici un modèle unidimensionnel sans pression capillaire, sans puits et sans terme de gravité, dans un milieu solide homogène. Ceci modélise, par exemple, une expérience de laboratoire sur une "carotte" de milieu poreux pleine d'huile et dans laquelle on injecte de l'eau à une extrémité. On ne s'intéresse pas aux unités (c'est-à-dire que l'on ne cherche à donner des valeurs réalistes pour les quantités ayant une dimension, telles que la pression, la viscosité et la perméabilité). Ce point sera abordé uniquement pour l'étude d'un cas "réaliste" dans la section 4.

La variable spatiale  $x$  appartient à  $\Omega = ]0, 1[$  et la variable temporelle à  $]0, T[$ , où  $T > 0$  est donné. En reprenant les équations de la section 2 et en notant  $s = s_w$  et  $p = p_w$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi s}{\partial t} + \frac{\partial v_w}{\partial x} &= 0 \text{ dans } \Omega \times ]0, T[, \\ \frac{\partial \phi(1-s)}{\partial t} + \frac{\partial v_o}{\partial x} &= 0 \text{ dans } \Omega \times ]0, T[, \end{aligned} \quad (7)$$

et :

$$\begin{aligned} v_w &= -f_w(s)K \frac{\partial p}{\partial x}, \text{ dans } \Omega \times ]0, T[, \\ v_o &= -f_o(s)K \frac{\partial p}{\partial x}, \text{ dans } \Omega \times ]0, T[, \end{aligned} \quad (8)$$

ce qui peut aussi s'écrire, en éliminant  $v_w$  et  $v_o$  et en utilisant le fait que  $\phi$  est une constante strictement positive (ainsi que  $K$  d'ailleurs) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ f_w(s) \frac{K}{\phi} \frac{\partial p}{\partial x} \right] &= 0 \text{ dans } \Omega \times ]0, T[, \\ -\frac{\partial s}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ f_o(s) \frac{K}{\phi} \frac{\partial p}{\partial x} \right] &= 0 \text{ dans } \Omega \times ]0, T[. \end{aligned} \quad (9)$$

Les fonctions  $f_w$  et  $f_o$  sont des données du problème (elles sont déterminées à partir d'expériences). Voici des exemples de fonctions possibles :

$$\begin{aligned} \textbf{Exemple 1} : f_w(\sigma) &= \sigma, f_o(\sigma) = 1 - \sigma, \text{ pour tout } \sigma \in [0, 1], \\ \textbf{Exemple 2} : f_w(\sigma) &= \sigma^2, f_o(\sigma) = \frac{(1-\sigma)^2}{4}, \text{ pour tout } \sigma \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (10)$$

D'autres exemples sont possibles, mais, dans tous les cas, la fonction  $f_w + f_o$  est continue et strictement positive sur  $[0, 1]$ , la fonction  $f_w$  est lipschitzienne croissante et s'annule en 0, et la fonction  $f_o$  est lipschitzienne décroissante et s'annule en 1.

L'avantage considérable du cas unidimensionnel est qu'il est possible d'éliminer l'inconnue  $p$ . En effet, en sommant les deux équations de (9), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ (f_w(s) + f_o(s)) \frac{K}{\phi} \frac{\partial p}{\partial x} \right] = 0,$$

et donc que la quantité  $\left[ (f_w(s) + f_o(s)) \frac{K}{\phi} \frac{\partial p}{\partial x} \right]$  ne dépend que de  $t$ , il existe  $q$ , ne dépendant que de  $t$ , t.q. :

$$\left[ -\frac{K}{\phi} \frac{\partial p}{\partial x} \right] (x, t) = \frac{q(t)}{f_w(s(x, t)) + f_o(s(x, t))}, \text{ pour tout } (x, t) \in ]0, 1[ \times ]0, T[, \quad (11)$$

(On rappelle que la fonction  $f_w + f_o$  ne s'annule pas.) On suppose, pour simplifier, que  $q(t)$  ne dépend pas de  $t$  (cette simplification est mineure), on note  $\alpha$  cette valeur constante de  $t$ . On peut supposer  $\alpha \geq 0$  (sinon, il suffit de changer la variable  $x$  en  $-x$ ). Compte tenu de (11), le système (9) se réduit à :

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\alpha f_w(s)}{f_w(s) + f_o(s)} \right] = 0 \text{ dans } \Omega \times ]0, T[. \quad (12)$$

Cette équation s'appelle "Equation de Buckley-Leverett" dans la littérature pétrolière. Il s'agit d'une équation hyperbolique (en général, non linéaire),  $s_t + (f(s))_x = 0$ , avec  $f = \alpha f_w / (f_w + f_o)$ . Grâce aux hypothèses sur  $f_w$ ,  $f_o$  et  $\alpha$ , cette fonction  $f$  est toujours croissante.

Il faut maintenant compléter (12) (ou le système complet (9)) avec des conditions aux limites et initiale. Le fait que  $\alpha$  soit donné est l'une de ces conditions aux limites (la quantité  $\alpha\phi$  représente le débit de

fluide). Cette condition aux limites peut s'écrire :

$$\left[ -\frac{K}{\phi}(f_w(s) + f_o(s))\frac{\partial p}{\partial x} \right] (0, t) = \alpha, \text{ pour tout } t \in [0, T]. \quad (13)$$

Pour obtenir une seconde condition aux limites et une condition initiale, on suppose que l'on modélise un milieu poreux saturé d'huile et que l'on injecte en  $x = 0$  de l'eau (avec le débit  $\alpha$  constant). On demande donc que  $s(0, t) = 1$  pour tout  $t$  (injection d'eau pure) et que  $s(x, 0) = 1$  pour tout  $x$  (le milieu poreux est saturé d'huile à l'instant initial). Si on s'intéresse au système complet (9), il faut ajouter une condition aux limites sur  $p$ , par exemple  $p(1, t)$  connu pour tout  $t$ .

On peut maintenant calculer la solution exacte (pour  $s$  mais aussi pour  $p$  si on le souhaite) dans les deux exemples donné en (10).

**Exemple 1 :** On a, pour cet exemple,  $f(\sigma) = \alpha\sigma$  pour tout  $\sigma \in [0, 1]$ . L'équation (12) est linéaire. On peut supposer  $\alpha = 1$  (pour  $\alpha > 0$ , on se ramène à  $\alpha = 1$  par un changement de temps). Compte tenu des conditions aux limites et initiale, la solution est, à l'instant  $T$  :

$$u(x, T) = 1, \text{ si } x < T, \quad u(x, T) = 0, \text{ si } x > T.$$

**Exemple 2 :** On a, pour cet exemple,  $f(\sigma) = \alpha 4\sigma^2 / (4\sigma^2 + (1-\sigma)^2)$  pour tout  $\sigma \in [0, 1]$ . L'équation (12) est non linéaire. Ici aussi on peut supposer  $\alpha = 1$  (pour  $\alpha > 0$ , on se ramène à  $\alpha = 1$  par un changement de temps). On note  $\gamma$ , l'unique point de  $]0, 1[$  est t.q.  $f'(\gamma) = f(\gamma)/\gamma$ , un calcul simple donne  $\gamma = 1/\sqrt{5}$  (c'est-à-dire environ 0.48). A l'instant  $T$ , la solution  $u(\cdot, T)$  est une fonction convexe décroissante de 1 à  $\gamma$  lorsque  $x$  décrit l'intervalle  $]0, f'(\gamma)T[$ , elle est discontinue au point  $f'(\gamma)T$  (c'est-à-dire environ 0.81 pour  $T = 1/2$ ) et est égale à 0 pour  $x > f'(\gamma)T$ . Cette solution est l'unique solution faible entropique du problème (et c'est bien la solution recherchée). Il est intéressant de remarquer que la solution de l'exemple 1 est une solution faible (mais non entropique) de l'exemple 2...

On donne dans la section suivante une méthode numérique efficace pour calculer, de manière approchée, la solution de ce problème. On souhaite, bien sûr, avoir une méthode généralisable à des cas où l'on ne sait pas calculer la solution exacte...

### 3.2 Discrétisation du modèle unidimensionnel sans gravité

On donne ici le schéma numérique le plus couramment utilisé par les simulateurs pétroliers pour calculer la solution (approchée) du système (9) avec les conditions aux limites et initiale données dans la section précédente. On ne travaille pas directement sur la discrétisation de l'équation (12) car la méthode exposée ici est aussi celle qui permet de faire un schéma dans les cas multidimensionnels, pour lesquels il n'est pas possible d'éliminer la pression et de se ramener, comme dans la section précédente, à une seule équation sur la saturation (du type (12)). On va voir cependant ce que donne la discrétisation de (9) en tant que schéma numérique pour résoudre (12).

On utilise un maillage espace-temps à pas constant, pour simplifier. Le pas d'espace est noté  $h$  et le pas de temps est noté  $k$ . Il existe  $N, M \in \mathbb{N}^*$  t.q.  $h = 1/N$  et  $k = T/M$ . Pour  $i \in \{1, \dots, N\}$ , on note  $x_i = ih - h/2$  et pour  $i \in \{0, \dots, N\}$ , on note  $x_{i+1/2} = ih$  (de sorte que  $x_{1/2} = 0$  et  $x_{N+1/2} = 1$ ). Pour  $n \in \{0, \dots, M\}$ , on note  $t_n = nk$  (de sorte que  $t_M = 1$ ).

Les inconnues discrètes sont les quantités  $s_i^n$  et  $p_i^n$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $n \in \{0, \dots, M\}$ , ce sont les valeurs approchées recherchées pour  $s$  et  $p$  à l'instant  $t_n$  et au point  $x_i$  (ou dans la maille  $]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$ ).

la condition initiale est prise en compte dans le calcul de  $s_i^0$  :

$$s_i^0 = 0, \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, N\}. \quad (14)$$

Pour calculer les valeurs au temps  $t_{n+1}$  à partir des valeurs au temps  $t_n$ , le schéma utilisé est un schéma de volumes finis (en espace), explicite en temps pour  $s$  et implicite en temps pour  $p$  (un tel schéma

est appelé ‘‘schéma IMPES’’). En introduisant des inconnues auxillaires notées  $(f_w)_{i+1/2}^n$ ,  $(f_o)_{i+1/2}^n$  et  $(p_x)_{i+1/2}^{n+1}$ , pour  $i \in \{0, \dots, N\}$  et  $n \in \{0, \dots, M-1\}$ , il s’écrit, pour tout  $n \in \{0, \dots, M-1\}$  :

$$\begin{aligned} \phi h \frac{s_i^{n+1} - s_i^n}{k} - (f_w)_{i+1/2}^n K(p_x)_{i+1/2}^{n+1} + (f_w)_{i-1/2}^n K(p_x)_{i-1/2}^{n+1} &= 0, \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, N\}, \\ -\phi h \frac{s_i^{n+1} - s_i^n}{k} - (f_o)_{i+1/2}^n K(p_x)_{i+1/2}^{n+1} + (f_o)_{i-1/2}^n K(p_x)_{i-1/2}^{n+1} &= 0, \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, N\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Un principe fondamental des schémas utilisés par les pétroliers est de prendre une valeur décentrée pour  $(f_w)_{i+1/2}^n$  et  $(f_o)_{i+1/2}^n$  selon le signe de  $(p_x)_{i+1/2}^{n+1}$  (qui est, pour l’instant, inconnu...) :

$$\begin{aligned} (f_w)_{i+1/2}^n &= f_w(s_i^n) \text{ et } (f_o)_{i+1/2}^n = f_o(s_i^n), \text{ si } (p_x)_{i+1/2}^{n+1} < 0, \\ (f_w)_{i+1/2}^n &= f_w(s_{i+1}^n) \text{ et } (f_o)_{i+1/2}^n = f_o(s_{i+1}^n), \text{ si } (p_x)_{i+1/2}^{n+1} > 0. \end{aligned} \quad (16)$$

(le cas  $(p_x)_{i+1/2}^{n+1} = 0$  est sans intérêt.) Ces choix sont faits pour tout  $i \in \{0, \dots, N\}$ , on peut donc être amené à utiliser des valeurs  $s_0^n$  et  $s_{N+1}^n$  non encore introduites (elles seront données par les conditions aux limites).

On peut maintenant trouver le signe de  $(p_x)_{i+1/2}^{n+1}$ , sans le calculer (ceci sera impossible dans le cas multidimensionnel). En effet, on remarque que, en sommant les deux équations de (15), on obtient :

$$((f_w)_{i+1/2}^n + (f_o)_{i+1/2}^n) K(p_x)_{i+1/2}^{n+1} = ((f_w)_{i-1/2}^n + (f_o)_{i-1/2}^n) K(p_x)_{i-1/2}^{n+1}, \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, N\}.$$

La quantité  $-\frac{K}{\phi}((f_w)_{i+1/2}^n + (f_o)_{i+1/2}^n)(p_x)_{i+1/2}^{n+1}$  est donc indépendante de  $i$ . C’est une approximation de  $-\frac{K}{\phi}(f_w + f_o)\frac{\partial p}{\partial x}$ , la condition aux limites (13) suggère alors de prendre :

$$-\frac{K}{\phi}((f_w)_{i+1/2}^n + (f_o)_{i+1/2}^n)(p_x)_{i+1/2}^{n+1} = \alpha, \text{ pour tout } i \in \{0, \dots, N\}. \quad (17)$$

Comme  $\alpha \geq 0$ , on peut supposer que  $\alpha > 0$  (le cas  $\alpha = 0$  est trivial), le signe de  $(p_x)_{i+1/2}^{n+1}$  est toujours négatif. On a donc  $(f_w)_{i+1/2}^n = f_w(s_i^n)$  et  $(f_o)_{i+1/2}^n = f_o(s_i^n)$  pour tout  $i \in \{0, \dots, N\}$ . Pour  $i = 0$ , on a donc besoin de  $s_0^n$ , qui n’est pas une inconnue du problème. Compte tenu de la condition aux limites  $s(0, t) = 1$  pour tout  $t$ , on prend  $s_0^n = 1$  pour tout  $n \in \{0, \dots, M-1\}$ .

Il est maintenant possible de calculer explicitement les valeurs  $s_i^{n+1}$  pour  $i \in \{1, \dots, N\}$  à partir des valeurs  $s_i^n$  pour  $i \in \{0, \dots, N\}$ . En effet, compte tenu du choix fait pour  $(f_w)_{i+1/2}^n$  et  $(f_o)_{i+1/2}^n$ , (17) donne :

$$-\frac{K}{\phi}(p_x)_{i+1/2}^{n+1} = \frac{\alpha}{f_w(s_i^n) + f_o(s_i^n)}, \text{ pour tout } i \in \{0, \dots, N\}. \quad (18)$$

et la première équation de (15) donne :

$$h \frac{s_i^{n+1} - s_i^n}{k} + \frac{\alpha f_w(s_i^n)}{f_w(s_i^n) + f_o(s_i^n)} - \frac{\alpha f_w(s_{i-1}^n)}{f_w(s_{i-1}^n) + f_o(s_{i-1}^n)} = 0, \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, N\}. \quad (19)$$

On retrouve ainsi le schéma classique ‘‘décentré amont’’ pour la discrétisation de (12).

On peut aussi calculer  $p_i^n$  pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$ . En effet, la formule (18) donne  $(p_x)_{i+1/2}^{n+1}$  pour tout  $i \in \{0, \dots, N\}$ . On discrétise maintenant  $p_x$ . Pour  $i \in \{0, \dots, N-1\}$ , on prend  $(p_x)_{i+1/2}^{n+1} = (p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1})/h$ . Pour  $i = N$ , on prend  $(p_x)_{N+1/2}^{n+1} = 2(p_{N+1}^{n+1} - p_N^{n+1})/h$ . La quantité  $p_{N+1}^{n+1}$  est donnée par la condition aux limites sur  $p(1, t)$ , on calcule ensuite  $p_i^{n+1}$  pour  $i = \{N, \dots, 1\}$ .

Pour conclure sur cette discrétisation, il est important de noter que le schéma étant partiellement explicite, il demande une condition dite “de stabilité” donnant une restriction sur le pas de temps en fonction du pas d’espace. Cette condition s’écrit :

$$k \max\{f'(\sigma), \sigma \in [0, 1]\} \leq h. \quad (20)$$

(On rappelle que  $f = \frac{\alpha f_w}{f_w + f_o}$ .)

La condition (20) permet, en particulier, d’avoir  $s_i^n \in [0, 1]$  pour tout  $i$  et  $n$  (pourvu que les conditions aux limites et initiale sur  $s$  prennent aussi leurs valeurs entre 0 et 1). Si la solution du schéma numérique vérifie  $s_i^n \in [0, 1]$  pour tout  $i$  et  $n$ , on dit que le schéma numérique vérifie la “condition de bornes naturelles sur  $s$ ”.

Cette condition de bornes naturelles sur  $s$  est bien une condition de stabilité mais elle est insuffisante. En effet, des exemples simples montrent que pour des pas de temps plus grands, c’est-à-dire ne vérifiant pas  $k \max\{f'(\sigma), \sigma \in [0, 1]\} \leq h$ , la solution du schéma numérique peut vérifier  $s_i^n \in [0, 1]$  pour tout  $i$  et  $n$  mais ne pas converger vers la “bonne” solution de (12), c’est-à-dire la solution faible entropique de (12), quand  $h$  et  $k$  tendent vers 0 (dans ce cas, la solution approchée converge vers une solution faible non entropique de (12), quand  $h$  et  $k$  tendent vers 0).

### 3.3 Modèle unidimensionnel avec terme de gravité

On ajoute maintenant un terme de gravité au modèle étudié et discrétisé dans les sections 3.1-3.2. Ceci revient à considérer une carotte verticale plutôt que horizontale. Les autres données et paramètres sont ceux des sections 3.1-3.2.

On rappelle que  $\rho_w$  et  $\rho_o$  sont les masses volumiques des deux phases (on a  $\rho_w > \rho_o$ ) et que  $g$  la constante de gravité. Les équations (8) deviennent alors :

$$\begin{aligned} v_w &= -f_w(s)K\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho_w g\right), \text{ dans } \Omega \times ]0, T[, \\ v_o &= -f_o(s)K\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho_o g\right), \text{ dans } \Omega \times ]0, T[. \end{aligned} \quad (21)$$

Avec les équations (7), le système (9) devient donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ f_w(s) \frac{K}{\phi} \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \rho_w g \right) \right] &= 0 \text{ dans } \Omega \times ]0, T[, \\ -\frac{\partial s}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ f_o(s) \frac{K}{\phi} \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \rho_o g \right) \right] &= 0 \text{ dans } \Omega \times ]0, T[. \end{aligned} \quad (22)$$

Les fonctions  $f_w$  et  $f_o$  sont identiques à celles des sections précédentes. On rappelle que la fonction  $f_w + f_o$  est continue et strictement positive sur  $[0, 1]$ , la fonction  $f_w$  est lipschitzienne, croissante et nulle en 0, la fonction  $f_o$  est lipschitzienne, décroissante et nulle en 1,

Ici aussi, il est possible d’éliminer l’inconnue  $p$ . En sommant les deux équations de (9), on obtient :

$$\frac{K}{\phi} \frac{\partial}{\partial x} \left[ (f_w(s) + f_o(s)) \frac{\partial p}{\partial x} - f_w(s) \rho_w g - f_o(s) \rho_o g \right] = 0,$$

et donc que la quantité  $\frac{K}{\phi} \left[ (f_w(s) + f_o(s)) \frac{\partial p}{\partial x} - f_w(s) \rho_w g - f_o(s) \rho_o g \right]$  ne dépend que de  $t$ . On suppose aussi qu’elle ne dépend pas de  $t$  et on note  $-\alpha$  cette valeur. On a donc

$$-K(f_w(s) + f_o(s)) \frac{\partial p}{\partial x} + K f_w(s) \rho_w g + K f_o(s) \rho_o g = \alpha \phi \text{ dans } ]0, 1[ \times ]0, T[. \quad (23)$$

Avec cette équation on exprime  $\frac{\partial p}{\partial x}$  :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\alpha\phi}{K(f_w(s) + f_o(s))} + \frac{f_w(s)\rho_w + f_o(s)\rho_o}{(f_w(s) + f_o(s))}g.$$

On remplace  $\frac{\partial p}{\partial x}$  par cette expression dans la première équation de (22) et on obtient, par un petit calcul :

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\alpha f_w(s)}{f_w(s) + f_o(s)} + \beta \frac{f_w(s)f_o(s)}{f_w(s) + f_o(s)} \right] = 0 \text{ dans } \Omega \times ]0, T[,$$

avec  $\beta = \frac{K}{\phi}(\rho_w - \rho_o) > 0$ . Ce qui peut aussi s'écrire :

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{f_w(s)(\alpha + \beta f_o(s))}{f_w(s) + f_o(s)} \right] = 0 \text{ dans } \Omega \times ]0, T[, \quad (24)$$

Il s'agit aussi d'une équation hyperbolique non linéaire,  $s_t + (f(s))_x = 0$ , avec maintenant  $f$  donnée par :

$$f(\sigma) = \frac{f_w(\sigma)(\alpha + \beta f_o(\sigma))}{(f_w(\sigma) + f_o(\sigma))}, \text{ pour tout } \sigma \in [0, 1]. \quad (25)$$

Contrairement au cas de la section 3.1, cette fonction  $f$  n'est pas toujours croissante. Si on reprend l'exemple 1 de (10), on obtient  $f(\sigma) = -\beta\sigma^2 + (\alpha - \beta)\sigma$  pour tout  $\sigma \in [0, 1]$ .

Il faut maintenant compléter (24) (ou le système complet (22)) avec des conditions aux limites et initiale. la condition initiale est toujours  $s(x, 0) = 1$  pour tout  $x$  (le milieu poreux est saturé d'huile à l'instant initial). La quantité  $\alpha\phi$ , supposée connue, représente toujours le débit du fluide (qui est la somme des débits des deux phases), ce qui peut être vu comme une condition aux limites (le débit est donné en  $x = 0$ , par exemple), mais cette condition aux limites est insuffisante. Le problème des conditions aux limites pour une équation hyperbolique non linéaire comme (24) est difficile (mais maintenant bien compris). Il n'est pas abordé ici. Dans la section 3.4, on se contente de donner un choix possible des conditions aux limites pour  $s$  (ou plutôt pour  $f_w(s)$  et  $f_o(s)$ ). Comme dans la section 3.1, si on s'intéresse au système complet (22), il faut ajouter une condition aux limites sur  $p$ , par exemple  $p(1, t)$  connu pour tout  $t$ .

On ne va pas ici calculer la solution exacte dans les deux exemples donné en (10). Il faudrait pour cela être plus précis sur les conditions aux limites (ce qui est tout à fait possible).

On donne par contre dans la section suivante une méthode numérique efficace pour calculer, de manière approchée, la solution de ce problème. Les conditions aux limites sont précisées à cette occasion.

### 3.4 Discrétisation du modèle unidimensionnel avec gravité

On procède comme dans la section 3.2. On ne travaille pas directement sur la discrétisation de l'équation (24) mais sur la discrétisation de (22). Ceci donne toutefois un schéma numérique pour résoudre (24).

On reprend les notations de la section 3.2. Les pas de discrétisation sont  $h = 1/N$  et  $k = T/M$  avec  $N, M \in \mathbb{N}^*$ . On rappelle que  $x_i = ih - h/2$ ,  $x_{i+1/2} = ih$  et  $t_n = nk$ .

Les inconnues discrètes sont toujours les quantités  $s_i^n$  et  $p_i^n$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $n \in \{0, \dots, M\}$ , ce sont les valeurs approchées recherchées pour  $s$  et  $p$  à l'instant  $t_n$  et au point  $x_i$  (ou dans la maille  $]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$ ). la condition initiale est toujours prise en compte par (14), c'est-à-dire  $s_i^0 = 0$  pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$ .

Pour calculer les valeurs au temps  $t_{n+1}$  à partir des valeurs au temps  $t_n$ , le schéma utilisé est le schéma IMPES décrit dans la section 3.2. On suppose  $g = 1$  (ou on remplace  $\rho_p$  par  $\rho_p g$  pour  $p = w$  et  $p = o$ ,



ce qui donne le même résultat). En introduisant des inconnues auxillaires notées  $(f_w)_{i+1/2}^n$ ,  $(f_o)_{i+1/2}^n$  et  $(p_x)_{i+1/2}^{n+1}$ , pour  $i \in \{0, \dots, N\}$  et  $n \in \{0, \dots, M-1\}$ , le schéma s'écrit, pour tout  $n \in \{0, \dots, M-1\}$  :

$$\begin{aligned} \phi h \frac{s_i^{n+1} - s_i^n}{k} + F_{w,i+1/2}^n - F_{w,i-1/2}^n &= 0, \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, N\}, \\ -\phi h \frac{s_i^{n+1} - s_i^n}{k} + F_{o,i+1/2}^n - F_{o,i-1/2}^n &= 0, \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, N\}, \end{aligned} \quad (26)$$

avec

$$\begin{aligned} F_{w,i+1/2}^n &= -(f_w)_{i+1/2}^n K((p_x)_{i+1/2}^{n+1} - \rho_w), \text{ pour tout } i \in \{0, \dots, N\}, \\ F_{o,i+1/2}^n &= -(f_o)_{i+1/2}^n K((p_x)_{i+1/2}^{n+1} - \rho_o), \text{ pour tout } i \in \{0, \dots, N\}, \end{aligned} \quad (27)$$

Le décentrement de  $f_w(s)$  et  $f_o(s)$  est fait en prenant le sens de l'écoulement de chaque phase (dans le cas sans gravité de la section 3.2, les deux phases s'écoulaient dans le même sens). On prend donc pour  $(f_p)_{i+1/2}^n$ ,  $p = w$  ou  $p = o$ , une valeur décentrée selon le signe de  $(p_x)_{i+1/2}^{n+1} - \rho_p$  (qui est, pour l'instant, inconnu... ) :

$$\begin{aligned} (f_w)_{i+1/2}^n &= f_w(s_i^n), \text{ si } (p_x)_{i+1/2}^{n+1} - \rho_w < 0, \\ (f_w)_{i+1/2}^n &= f_w(s_{i+1}^n), \text{ si } (p_x)_{i+1/2}^{n+1} - \rho_w > 0, \\ (f_o)_{i+1/2}^n &= f_o(s_i^n), \text{ si } (p_x)_{i+1/2}^{n+1} - \rho_o < 0, \\ (f_o)_{i+1/2}^n &= f_o(s_{i+1}^n), \text{ si } (p_x)_{i+1/2}^{n+1} - \rho_o > 0. \end{aligned} \quad (28)$$

(Les cas d'égalité à 0 sont sans importance.) Ces choix sont faits pour tout  $i \in \{1, \dots, N-1\}$ . Les choix pour  $i = 0$  et  $i = N$  sont exposés plus loin (et correspondent aux conditions aux limites, c'est-à-dire en  $x = 0$  et  $x = 1$ ).

Pour déterminer le signe de  $(p_x)_{i+1/2}^{n+1} - \rho_w$  et le signe de  $(p_x)_{i+1/2}^{n+1} - \rho_o$ , on somme les deux équations de (26), on obtient :

$$F_{w,i+1/2}^n + F_{o,i+1/2}^n = F_{w,i-1/2}^n + F_{o,i-1/2}^n, \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, N\}.$$

La quantité  $F_{w,i+1/2}^n + F_{o,i+1/2}^n$  est donc indépendante de  $i$  pour  $i \in \{0, \dots, N\}$ . C'est une approximation de  $-K(f_w(s) + f_o(s)) \frac{\partial p}{\partial x} + K f_w(s) \rho_w + K f_o(s) \rho_o$  (on rappelle que  $g = 1$ ), la condition (23) (qui peut être vu comme une condition aux limites, comme dans les sections 3.1-3.2) suggère alors de prendre :

$$F_{w,i+1/2}^n + F_{o,i+1/2}^n = \alpha \phi, \text{ pour tout } i \in \{0, \dots, N\}. \quad (29)$$

On suppose que  $\alpha \geq 0$ . Avec (27), on déduit de (29) la valeur de  $(p_x)_{i+1/2}$  :

$$(p_x)_{i+1/2} = -\frac{\alpha \phi}{K((f_w)_{i+1/2}^n + (f_o)_{i+1/2}^n)} + \frac{\rho_w (f_w)_{i+1/2}^n + \rho_o (f_o)_{i+1/2}^n}{((f_w)_{i+1/2}^n + (f_o)_{i+1/2}^n)}, \text{ pour tout } i \in \{0, \dots, N\}, \quad (30)$$

et donc le signe de  $(p_x)_{i+1/2} - \rho_w$  car :

$$\frac{K}{\phi} [(p_x)_{i+1/2} - \rho_w] = -\frac{\alpha}{(f_w)_{i+1/2}^n + (f_o)_{i+1/2}^n} - \frac{\beta (f_o)_{i+1/2}^n}{(f_w)_{i+1/2}^n + (f_o)_{i+1/2}^n} \leq 0. \quad (31)$$

De (28), on déduit alors :

$$(f_w)_{i+1/2}^n = f_w(s_i^n) \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, N-1\}. \quad (32)$$

On détermine maintenant  $(f_o)_{i+1/2}^n$ . De (30) et (32) on déduit :

$$\frac{K}{\phi} [(p_x)_{i+1/2} - \rho_o] = \frac{-\alpha + \beta f_w(s_i^n)}{f_w(s_i^n) + (f_o)_{i+1/2}^n}.$$

Le signe de  $(p_x)_{i+1/2} - \rho_o$  est donc le même que le signe de  $-\alpha + \beta f_w(s_i^n)$ . On a donc, avec (28), pour tout  $i \in \{1, \dots, N-1\}$  :

$$\begin{aligned} (f_o)_{i+1/2}^n &= f_w(s_i^n) \text{ si } -\alpha + \beta f_w(s_i^n) < 0, \\ (f_o)_{i+1/2}^n &= f_w(s_{i+1}^n) \text{ si } -\alpha + \beta f_w(s_i^n) > 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Avec (31), (32) et (33) on peut maintenant calculer  $F_{w,i+1/2}^n$  (et aussi  $F_{o,i+1/2}^n$ ), pour  $i \in \{1, \dots, N-1\}$  en fonction des valeurs  $s_i^n$  pour  $i \in \{1, \dots, N\}$  :

$$F_{w,i+1/2}^n = \phi g(s_i^n, s_{i+1}^n), \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, N-1\}, \quad (34)$$

avec, pour  $a, b \in [0, 1]$  :

$$\begin{aligned} g(a, b) &= \frac{f_w(a)(\alpha + \beta f_o(a))}{f_w(a) + f_o(a)} \text{ si } -\alpha + \beta f_w(a) \leq 0, \\ g(a, b) &= \frac{f_w(a)(\alpha + \beta f_o(b))}{f_w(a) + f_o(b)} \text{ si } -\alpha + \beta f_w(a) > 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Pour calculer  $\{s_i^{n+1}, i \in \{1, \dots, N\}\}$  en fonction de  $\{s_i^n, i \in \{1, \dots, N\}\}$ , il reste à déterminer  $F_{w,1/2}^n$  et  $F_{w,N+1/2}^n$ . Un choix possible est :

$$F_{w,1/2}^n = \alpha \phi, \quad (36)$$

ce qui exprime le fait que le flux entrant en  $x = 0$  est formé d'eau pure (on a alors aussi  $F_{o,1/2}^n = 0$ ), et :

$$F_{w,N+1/2}^n = \frac{\alpha f_w(u_N^n)}{f_w(u_N^n) + f_o(u_N^n)} \phi, \quad (37)$$

ce qui donne aussi  $F_{o,N+1/2}^n = \frac{\alpha f_o(u_N^n)}{f_w(u_N^n) + f_o(u_N^n)} \phi$ .

Le schéma numérique pour calculer  $\{s_i^{n+1}, i \in \{1, \dots, N\}\}$  en fonction de  $\{s_i^n, i \in \{1, \dots, N\}\}$  est donc (26) avec (34)-(35) pour calculer les flux intérieurs et (36)-(37) pour calculer les flux en  $x = 0$  et  $x = 1$ . Ce schéma discrétise donc l'équation (24) avec des conditions aux limites "convenables" (non données ici sur le problème continu mais uniquement sur le problème discrétisé).

Il est intéressant de remarquer que la fonction  $g$  est consistante par rapport à la fonction  $f$  donnée par (25) (et qui apparaît dans (24)), c'est-à-dire que  $g(a, a) = f(a)$  pour tout  $a \in [0, 1]$ , elle est croissante par rapport à son premier argument et décroissante par rapport à son deuxième argument et elle est lipschitzienne. En oubliant les conditions aux limites, le schéma numérique obtenu est donc un schéma "à flux monotone" pour la discrétisation de (24) (en fait, on peut aussi mettre les conditions aux limites dans un cadre semblable). L'étude des équations hyperboliques non linéaires montre qu'il s'agit d'un très bon schéma numérique. La condition de stabilité pour un tel schéma est :

$$Lk \leq h,$$

où  $L$  est la constante de lipschitz de  $g$  sur  $[0, 1]^2$  (ou un majorant d'ycelle).

Comme dans la section 3.2, on peut aussi calculer  $p_i^n$  pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$ . En effet, on calcule d'abord  $(p_x)_{i+1/2}^{n+1}$  pour tout  $i \in \{0, \dots, N\}$  avec (30). Puis on discrétise  $p_x$ . Pour  $i \in \{0, \dots, N-1\}$ , on prend  $(p_x)_{i+1/2}^{n+1} = (p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1})/h$ . Pour  $i = N$ , on prend  $(p_x)_{N+1/2}^{n+1} = 2(p_{N+1}^{n+1} - p_N^{n+1})/h$ . La quantité  $p_{N+1}^{n+1}$  est donnée par la condition aux limites sur  $p(1, t)$ , on calcule ensuite  $p_i^{n+1}$  pour  $i = \{N, \dots, 1\}$ .

Quelques études numériques supplémentaires sont intéressantes dans le cadre des sections 3.2-3.4. Par exemple :

- Programmer le schéma numérique “centré”, c’est-à-dire consistant à prendre des valeurs centrées plutôt que décentrées des quantités  $(f_p)_{i+1/2}$ ,  $p = w, o$ . Ce schéma est instable ( $s$  ne prend plus ses valeurs entre 0 et 1, par exemple) mais peut être stabilisé en ajoutant, dans  $F_{w,i+1/2}^n$ , un terme du type  $D(s_i^n - s_{i+1}^n)$ , avec  $D$  convenable choisi (et on retranche  $D(s_i^n - s_{i+1}^n)$  dans  $F_{o,i+1/2}^n$ ).
- Comparer le schéma décrit dans cette section pour (24) avec le schéma de Godunov (pour les flux intérieurs, sans changer pas les conditions aux limites). Le schéma de Godunov doit être un peu plus précis (moins “diffusif”).
- Pour diminuer la “diffusion numérique” du schéma, ajouter une procédure de “pentes” et “limites de pentes” sur  $s$  pour améliorer le calcul décentré des quantités  $(f_p)_{i+1/2}$ ,  $p = w, o$ . Il est aussi possible d’utiliser une procédure de pentes et limites de pentes directement sur  $f_p$ ,  $p = w, o$ . Ce point est important, dans la simulation de réservoirs, pour améliorer la précision du temps d’arrivée de l’eau aux puits producteurs.

## 4 Résolution numérique du modèle bidimensionnel

Dans toute cette section le domaine du réservoir est  $\Omega = ]0, L_x[ \times ]0, L_y[$ , avec  $L_x > 0$ ,  $L_y > 0$ , et le temps varie entre 0 et  $T$ ,  $T > 0$ . Le maillage spatial est cartésien régulier, il est défini par  $n_x, n_y \in \mathbb{N}^*$  donnant les pas du maillage en  $x$  et en  $y$  :

$$h_x = \frac{L_x}{n_x}, \quad h_y = \frac{L_y}{n_y}.$$

La maillage temporel est irrégulier, on cherche la solution du problème aux temps  $t_n$ ,  $n \in \{0, \dots, M\}$ , avec  $t_0 = 0$ ,  $t_M = T$  et  $t_{n+1} - t_n = k_n > 0$  pour  $n \in \{0, \dots, M-1\}$ . La discrétisation spatiale (c’est-à-dire le choix de  $n_x$  et  $n_y$ ) est donnée, mais le pas de temps  $k_n$  sera calculé à chaque temps  $t_n$  de manière à respecter une contrainte de stabilité du schéma (voir la section 4.1.5, par exemple).

Pour  $i \in \{1, \dots, n_x\}$ , on note  $x_i = ih_x - h/2$  et pour  $i \in \{0, \dots, n_x\}$ , on note  $x_{i+1/2} = ih_x$  (de sorte que  $x_{1/2} = 0$  et  $x_{n_x+1/2} = L_x$ ). De même, pour  $j \in \{1, \dots, n_y\}$ , on note  $y_j = jh_y - h/2$  et pour  $j \in \{0, \dots, n_y\}$ , on note  $y_{j+1/2} = jh_y$  (de sorte que  $y_{1/2} = 0$  et  $y_{n_y+1/2} = L_y$ ).

le problème à résoudre a toujours avoir comme inconnues principales la saturation de l’eau, notée  $s$ , et la pression de l’eau, notée  $p$ . Les inconnues discrètes sont maintenant les quantités  $s_{i,j}^n$  et  $p_{i,j}^n$ , pour  $i \in \{1, \dots, n_x\}$ ,  $j \in \{1, \dots, n_y\}$  et  $n \in \{0, \dots, M\}$ , ce sont les valeurs approchées recherchées pour  $s$  et  $p$  à l’instant  $t_n$  et au point  $(x_i, y_j)$  ou dans la maille  $M_{i,j}$  définie par :

$$M_{i,j} = ]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[ \times ]y_{j-1/2}, y_{j+1/2}[.$$

(Faire un dessin...)

On s’intéresse d’abord à un cas simplifié. Puis, on ajoute des difficultés supplémentaires : la prise en compte de la gravité, la prise en compte du caractère hétérogène du milieu et la prise en compte des puits. Enfin, on donne des valeurs “réalistes” pour les paramètres.

### 4.1 Discrétisation d’un cas simplifié

Pour ce problème simplifié, on ne tient pas compte la gravité, de la pression capillaire et des puits. On suppose aussi que le milieu poreux est homogène, fixe (c’est-à-dire que  $\phi$  et  $K$  sont constants en espace et en temps) et isotrope (c’est-à-dire que  $K$  est un scalaire). Pour ce cas simple, les équations à résoudre sont :

$$\frac{\partial \phi s}{\partial t} + \operatorname{div}(v_w) = 0 \text{ dans } \Omega \times ]0, T[, \quad (38)$$

$$\frac{\partial \phi(1-s)}{\partial t} + \operatorname{div}(v_o) = 0 \text{ dans } \Omega \times ]0, T[, \quad (39)$$

$$v_w = -f_w(s)K\nabla p, \text{ dans } \Omega \times ]0, T[, \quad (40)$$

$$v_o = -f_o(s)K\nabla p, \text{ dans } \Omega \times ]0, T[. \quad (41)$$

Comme cela a déjà été dit, les fonctions  $f_w$  et  $f_o$  sont connues (dans (40) et (41), elles sont évaluées au point  $s(x, t)$ ). Plus précisément, on a :

$$f_w = \frac{r_w}{\mu_w}, \quad f_o = \frac{r_o}{\mu_o}, \quad (42)$$

où  $\mu_w$  et  $\mu_o$  sont les viscosités des deux phases, elles sont supposées constantes (dans des modèles plus compets, elles peuvent dépendre de la pression),  $r_w$  et  $r_o$  sont les perméabilités relatives, ce sont des fonctions connues d'une seule variable (dans des modèles plus complets, ces fonctions peuvent aussi dépendre du point  $x$ ).

Dans les exemples (10), les choix de ces fonctions  $r_w$  et  $r_o$  et des viscosités  $\mu_w$  et  $\mu_o$  étaient :

$$\mathbf{Exemple 1} : r_w(\sigma) = \sigma, \quad r_o(\sigma) = 1 - \sigma, \quad \text{pour tout } \sigma \in [0, 1], \quad \mu_w = \mu_o = 1, \quad (43)$$

$$\mathbf{Exemple 2} : r_w(\sigma) = \sigma^2, \quad r_o(\sigma) = (1 - \sigma)^2, \quad \text{pour tout } \sigma \in [0, 1], \quad \mu_w = 1, \quad \mu_o = 4. \quad (43)$$

On rappelle que, dans tous les cas (cf. section 3), la fonction  $f_w + f_o$  est continue et strictement positive sur  $[0, 1]$ , la fonction  $f_w$  est lipschitzienne croissante et s'annule en 0, et la fonction  $f_o$  est lipschitzienne décroissante et s'annule en 1.

Aux équations (38)-(41), il faut ajouter les conditions initiales et des conditions aux limites. Dans la suite, la condition initiale est toujours  $s(x, 0) = 0$  pour tout  $x \in \Omega$  (le milieu poreux est donc saturé d'huile à l'instant initial) et plusieurs conditions aux limites possibles sont considérées.

Dans les équations (38)-(39) on remplace  $v_w$  et  $v_o$  par les expressions données en (40)-(41). Le système (38)-(41) est alors équivalent au système suivant, de 2 équations à 2 inconnues ( $s$  et  $p$ ) :

$$\frac{\partial \phi s}{\partial t} - \operatorname{div}(f_w(s)K\nabla p) = 0 \text{ dans } \Omega \times ]0, T[, \quad (44)$$

$$\frac{\partial \phi(1-s)}{\partial t} - \operatorname{div}(f_o(s)K\nabla p) = 0 \text{ dans } \Omega \times ]0, T[. \quad (45)$$

En additionnant les deux équations, ce système est équivalent au système suivant :

$$-\operatorname{div}(v) = 0, \quad v = (f_w(s) + f_o(s))K\nabla p \text{ dans } \Omega \times ]0, T[, \quad (46)$$

$$\frac{\partial \phi s}{\partial t} - \operatorname{div}\left(\frac{f_w(s)}{f_w(s) + f_o(s)}v\right) = 0 \text{ dans } \Omega \times ]0, T[. \quad (47)$$

L'équation (46) s'écrit comme une équation elliptique linéaire sur  $p$ , pour  $s$  donnée. L'équation (47) est une équation hyperbolique (non linéaire, en général) sur  $s$ , pour  $v$  donnée. Ici, contrairement au cas unidimensionnel vu précédemment, on ne peut pas éliminer l'inconnues  $p$ . En fait, dans le cas unidimensionnel, de l'équation  $\operatorname{div}(v) = 0$  on déduit  $v$  grâce à une condition aux limites sur le débit total (la condition (13)) et on est donc ramené à une unique équation sur  $s$  (qui est, en 1-d, l'équation (12), correspondant ici à (47)). Cette élimination de  $p$ , est, en général, impossible en multi-d.

On discrétise maintenant (44)-(45), ou (46)-(47), avec les conditions aux limites et initiale. On rappelle que les inconnues discrètes sont  $s_{i,j}^n$  et  $p_{i,j}^n$ , pour  $i \in \{1, \dots, n_x\}$ ,  $j \in \{1, \dots, n_y\}$  et  $n \in \{0, \dots, M\}$ . La discrétisation de la condition initiale donne  $s_{i,j}^0 = 0$ , pour  $i \in \{1, \dots, n_x\}$ ,  $j \in \{1, \dots, n_y\}$ . Il n'y a pas de calcul des valeurs  $p_{i,j}^0$  pour  $i \in \{1, \dots, n_x\}$ ,  $j \in \{1, \dots, n_y\}$  (cela introduira seulement une petite ambiguïté pour le calcul du décentrement des perméabilités relatives lors du traitement de certaines conditions aux limites). On décrit maintenant, pour  $n \leq M - 1$ , le calcul des valeurs de  $s_{i,j}^{n+1}$  et  $p_{i,j}^{n+1}$ , pour  $i \in \{1, \dots, n_x\}$ ,  $j \in \{1, \dots, n_y\}$ , à partir des valeurs connues de  $s_{i,j}^n$  et  $p_{i,j}^n$  pour  $i \in \{1, \dots, n_x\}$ ,  $j \in \{1, \dots, n_y\}$ .

#### 4.1.1 Discrétisation de (44)-(39)

Pour  $(i, j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}$ , on note  $C(M_{i,j})$  l'ensemble des 4 cotés de  $M_{i,j}$ , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} C(M_{i,j}) &= \{c_{i-1/2,j}, c_{i+1/2,j}, c_{i,j-1/2}, c_{i,j+1/2}\} \text{ avec :} \\ c_{i-1/2,j} &= x_{i-1/2} \times ]y_{j-1/2}, y_{j+1/2}[ , \\ c_{i+1/2,j} &= x_{i+1/2} \times ]y_{j-1/2}, y_{j+1/2}[ , \\ c_{i,j-1/2} &= ]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[ \times y_{j-1/2}, \\ c_{i,j+1/2} &= ]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[ \times y_{j+1/2}. \end{aligned}$$

Pour  $c \in C(M_{i,j})$ , on note aussi  $n_{M_{i,j},c}$  le vecteur normal à  $c$ , extérieur à  $M_{i,j}$ . Par exemple, si  $c = c_{i+1/2,j}$ , on a donc  $n_{M_{i,j},c} = (1, 0)^t$ .

Pour  $n \leq M - 1$ , il y a  $2n_x n_y$  inconnues discrètes :  $\{s_{i,j}^{n+1}, p_{i,j}^{n+1}, (i, j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}\}$ . Il faut donc trouver  $2n_x n_y$  équations. On obtient ces équations en intégrant les équations (44)-(45) sur la maille  $M_{i,j}$  pour  $(i, j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}$  et en remplaçant la dérivée en temps par un quotient différentiel :

$$\begin{aligned} h_x h_y \phi \frac{s_{i,j}^{n+1} - s_{i,j}^n}{k_n} + \sum_{c \in C(M_{i,j})} F_{M_{i,j},c}^n &= 0, \\ -h_x h_y \phi \frac{s_{i,j}^{n+1} - s_{i,j}^n}{k_n} + \sum_{c \in C(M_{i,j})} G_{M_{i,j},c}^n &= 0, \end{aligned} \quad (48)$$

où  $F_{M_{i,j},c}^n$  désigne une approximation de l'intégrale (1-dimensionnelle) de  $-f_w(s)K\nabla p \cdot n_{M_{i,j},c}$  sur  $c$ , entre les temps  $t_n$  et  $t_{n+1}$ . De même  $G_{M_{i,j},c}^n$  désigne une approximation de l'intégrale (1-dimensionnelle) de  $-f_o(s)K\nabla p \cdot n_{M_{i,j},c}$  sur  $c$ , entre les temps  $t_n$  et  $t_{n+1}$ .

On donne maintenant les approximations choisies pour obtenir les quantités  $F_{M_{i,j},c}^n$  et  $G_{M_{i,j},c}^n$ , appelées "flux", en distinguant le cas des flux intérieurs (correspondant à  $c \subset \Omega$ ) aux flux extérieurs (correspondant à  $c \subset \partial\Omega$ ).

#### 4.1.2 Discrétisation des flux intérieurs

Soit  $(i, j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}$ , on pose  $M = M_{i,j}$ . Soit  $c \in C(M)$ . On prend, par exemple,  $c = c_{i+1/2,j}$  (les autres cas se traitent de manière similaire). On suppose que  $c \subset \Omega$ . Ceci veut dire que  $i < n_x$  et que  $c$  est aussi un coté de  $M_{i+1,j}$ . Les approximations choisies pour  $F_{M,c}$  et  $G_{M,c}$  sont alors :

$$F_{M,c} = h_y (f_w)_c^n K \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i+1,j}^{n+1}}{h_x}, \quad G_{M,c} = h_y (f_o)_c^n K \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i+1,j}^{n+1}}{h_x}, \quad (49)$$

où  $(f_w)_c^n$  et  $(f_o)_c^n$  sont des approximations décentrées de  $f_w(s)$  et  $f_o(s)$  sur  $c$  à l'instant  $t_n$  :

$$\begin{aligned} (f_w)_c^n &= f_w(s_{i,j}^n) \text{ et } (f_o)_c^n = f_o(s_{i,j}^n) \text{ si } p_{i,j}^{n+1} > p_{i+1,j}^{n+1}, \\ (f_w)_c^n &= f_w(s_{i+1,j}^n) \text{ et } (f_o)_c^n = f_o(s_{i+1,j}^n) \text{ si } p_{i,j}^{n+1} < p_{i+1,j}^{n+1}. \end{aligned} \quad (50)$$

Comme on ne connaît pas le signe de  $p_{i,j}^{n+1} - p_{i+1,j}^{n+1}$  (la situation est plus compliquée que dans le cas unidimensionnel vu en section 3.2), on remplace, en général,  $n+1$  par  $n$  dans (50). Une méthode plus précise, mais plus coûteuse, consiste à déterminer ce signe de manière itérative. Nous prenons ici la méthode simple consistant à remplacer (50) par (51) :

$$\begin{aligned} (f_w)_c^n &= f_w(s_{i,j}^n) \text{ et } (f_o)_c^n = f_o(s_{i,j}^n) \text{ si } p_{i,j}^n > p_{i+1,j}^n, \\ (f_w)_c^n &= f_w(s_{i+1,j}^n) \text{ et } (f_o)_c^n = f_o(s_{i+1,j}^n) \text{ si } p_{i,j}^n < p_{i+1,j}^n. \end{aligned} \quad (51)$$

### 4.1.3 Discrétisation des flux extérieurs

On garde les notations précédentes,  $M = M_{i,j}$ , avec  $(i, j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}$ , et  $c \in C(M)$ . On prend toujours, par exemple,  $c = c_{i+1/2,j}$  (les autres cas se traitent de manière similaire), mais on suppose que  $c \subset \Omega$ . Ceci veut dire que  $i = n_x$ . Les approximations choisies pour  $F_{M,c}$  et  $G_{M,c}$  dépendent alors des conditions aux limites sur  $c$ . On utilise dans ce projet seulement trois conditions aux limites possibles :

- **Condition de flux nul.** Cette condition est :

$$F_{M,c} = G_{M,c} = 0. \quad (52)$$

- **Condition à flux imposé.** C'est une généralisation de la précédente. On utilise dans la section 6 une condition à flux d'eau imposé s'écrivant :

$$F_{M,c} = -a, \quad G_{M,c} = 0, \quad (53)$$

avec  $a > 0$  donné, correspondant au flux d'eau rentrant dans  $\Omega$  par  $c$ .

- **Condition à pression imposée.** Les données sont ici une pression, notée  $p_c$ , et une saturation, notée  $s_c$ . la pression  $p_c$  est la pression sur  $c$  et la saturation  $s_c$  donne la composition du fluide qui rentre dans le réservoir si la pression  $p_c$  est supérieure à celle du réservoir. Les choix pour  $F_{M,c}$  et  $G_{M,c}$  sont alors :

$$F_{M,c} = h_y (f_w)_c^n K \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_c}{h_x/2}, \quad G_{M,c} = h_y (f_o)_c^n K \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_c}{h_x/2}, \quad (54)$$

où  $(f_w)_c^n$  et  $(f_o)_c^n$  sont des approximations décentrées de  $f_w(s)$  et  $f_o(s)$  sur  $c$  à l'instant  $t_n$  :

$$\begin{aligned} (f_w)_c^n &= f_w(s_{i,j}^n) \text{ et } (f_o)_c^n = f_o(s_{i,j}^n) \text{ si } p_{i,j}^n > p_c, \\ (f_w)_c^n &= f_w(s_c) \text{ et } (f_o)_c^n = f_o(s_c) \text{ si } p_{i,j}^n < p_c. \end{aligned} \quad (55)$$

Ici aussi, comme pour les flux intérieurs, on peut avoir intérêt à remplacer  $p^n$  par  $p^{n+1}$  dans (55) et à calculer de manière itérative le signe de  $p_{i,j}^{n+1} - p_c$ . Il est aussi facile de généraliser cette condition aux limites en prenant  $p_c$  et  $s_c$  variables en temps.

### 4.1.4 Calcul de la pression

Le système à résoudre pour calculer  $\{s_{i,j}^{n+1}, p_{i,j}^{n+1}, (i, j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}\}$  est donc (48) avec les flux intérieurs donnés par (49),(51) et les flux extérieurs donnés, pour chaque bord de maille appartenant à  $\partial\Omega$ , par (52) ou (53) ou (54)-(55).

En additionnant les deux équations de (48), on élimine les inconnues  $s_{i,j}^{n+1}$ . Les inconnues  $\{p_{i,j}^{n+1}, (i, j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}\}$  sont solutions du système linéaire de  $n_x n_y$  équations à  $n_x n_y$  inconnues :

$$\sum_{c \in C(M_{i,j})} F_{M_{i,j},c}^n + G_{M_{i,j},c}^n = 0, \quad (i, j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}, \quad (56)$$

où les flux  $F$  et  $G$  sont donnés par (49),(51) et les flux extérieurs donnés, pour chaque bord de maille appartenant à  $\partial\Omega$ , par (52) ou (53) ou (54)-(55). Ce système linéaire est inversible si il y a au moins une condition aux limites à pression imposée (c'est-à-dire du type (54)-(55)) car, après un choix d'ordre de numérotation des inconnues et des équations, il correspond alors à un système dont la matrice  $A$  est symétrique définie positive. On peut remarquer que (56) est une discrétisation de (46) (équation elliptique

sur  $p$ , lorsque  $s$  est donné) avec des conditions aux limites qui donnent le deuxième membre du système linéaire (56).

Pour chaque instant  $t_n$ , on construit donc ce système linéaire à partir des valeurs connues de  $s_{i,j}^n$  (et  $p_{i,j}^n$  pour le choix du décentrement),  $(i, j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}$ . Puis, on résout ce système linéaire, on obtient  $\{p_{i,j}^{n+1}, (i, j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}\}$ .

#### 4.1.5 Calcul de la saturation, choix du pas de temps

La section 4.1.4 a permis de calculer  $\{p_{i,j}^{n+1}, (i, j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}\}$ . Il faut maintenant calculer  $\{s_{i,j}^{n+1}, (i, j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}\}$ . Ceci se fait en utilisant la première équation de (48) avec les flux intérieurs donnés par (49),(51) (il ne faut pas utiliser (50) si (50) n'a pas été utilisée pour calculer la pression) et les flux extérieurs donnés, pour chaque bord de maille appartenant à  $\partial\Omega$ , par (52) ou (53) ou (54)-(55). On obtient ainsi :

$$s_{i,j}^{n+1} = s_{i,j}^n - \frac{k_n}{h_x h_y \phi} \sum_{c \in C(M_{i,j})} F_{M_{i,j},c}^n, \quad (i, j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}. \quad (57)$$

Comme les valeurs de  $p_{i,j}^{n+1}$  sont connues pour tout  $(i, j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}$ , les valeurs de  $F_{M_{i,j},c}^n$  sont connues pour tout  $c \in C(M_{i,j})$  et tout  $(i, j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}$ . Pour calculer  $\{s_{i,j}^{n+1}, (i, j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}\}$ , il nous reste seulement à choisir le pas de temps  $k_n$ .

Le choix du pas de temps  $k_n$  est fait de manière à respecter des contraintes de "stabilité" du schéma numérique. On souhaite, par exemple, que  $s_{i,j}^{n+1} \in [0, 1]$  pour tout  $(i, j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}$ . Dans les simulateurs pétroliers, ce choix du pas de temps est fait en imposant une limitation sur la variation en temps de  $s$ , c'est-à-dire en imposant une condition du type, avec  $\delta$  donné :

$$|s_{i,j}^{n+1} - s_{i,j}^n| \leq \delta \text{ pour tout } (i, j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}.$$

Dans le modèle simple étudié ici, on peut calculer le pas de temps de manière plus efficace (pour avoir des résultats plus précis à coût égal), comme cela a été dans le cas unidimensionnel, en respectant en particulier la contrainte  $s_{i,j}^{n+1} \in [0, 1]$  pour tout  $(i, j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}$ . Pour cela on remarque que, pour les flux intérieurs, c'est-à-dire si  $c \subset \Omega$ , on a :

$$F_{M_{i,j},c}^n = \frac{(f_w)_c^n}{(f_w)_c^n + (f_o)_c^n} (F_{M_{i,j},c}^n + G_{M_{i,j},c}^n).$$

Cette égalité est aussi vraie pour le cas des flux extérieurs (c'est-à-dire  $c \subset \partial\Omega$ ) correspondant à des conditions aux limites à pression imposée. Enfin elle est aussi vraie pour les conditions aux limites à flux imposé (nul ou non nul) décrits dans la section 4.1.3 à condition de poser dans ce cas  $f_w^n = f_w(s_c)$  et  $f_o^n = f_o(s_c)$  avec  $s_c = 1$  (donc  $f_o(s_c) = 0$ ), ce qui correspond à dire que seule de l'eau peut rentrer dans  $\Omega$  par  $c$ . On a donc finalement :

$$F_{M_{i,j},c}^n = \frac{(f_w)_c^n}{(f_w)_c^n + (f_o)_c^n} (F_{M_{i,j},c}^n + G_{M_{i,j},c}^n),$$

pour tout  $c \in C(M_{i,j})$  et tout  $(i, j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}$ .

Ce qui donne, avec (57) :

$$s_{i,j}^{n+1} = s_{i,j}^n - \frac{k_n}{h_x h_y \phi} \sum_{c \in C(M_{i,j})} \frac{(f_w)_c^n}{(f_w)_c^n + (f_o)_c^n} (F_{M_{i,j},c}^n + G_{M_{i,j},c}^n),$$

$(i, j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}$ .

Puis, en utilisant (56) en en notant  $H_{M_{i,j},c}^n = F_{M_{i,j},c}^n + G_{M_{i,j},c}^n$  :

$$s_{i,j}^{n+1} = s_{i,j}^n - \frac{k_n}{h_x h_y \phi} \sum_{c \in C(M_{i,j})} \left( \frac{(f_w)_c^n}{(f_w)_c^n + (f_o)_c^n} - \frac{f_w(s_{i,j}^n)}{f_w(s_{i,j}^n) + f_o(s_{i,j}^n)} \right) H_{M_{i,j},c}^n, \quad (58)$$

$$(i, j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}.$$

On s'intéresse maintenant à la valeur du facteur devant  $H_{M_{i,j},c}^n$  dans (58). On triche légèrement ici en supposant que le décentrement amont donné par (51) et (55) (qui peut être incorrect) est le même que le décentrement amont donné par (50) et (55) où  $p^{(n)}$  est remplacé par  $p^{(n+1)}$  (qui est, lui, correct).

Si  $H_{M_{i,j},c}^n > 0$ , on a, par le choix du décentrement amont,  $(f_w)_c^n = f_w(s_{i,j}^n)$  et  $(f_o)_c^n = f_o(s_{i,j}^n)$ . Le facteur devant  $H_{M_{i,j},c}^n$  dans (58) est donc nul.

Si  $H_{M_{i,j},c}^n < 0$ , on a  $(f_w)_c^n = f_w(s_c)$  et  $(f_o)_c^n = f_o(s_c)$  si  $c \subset \partial\Omega$  (cas des flux extérieurs) et  $(f_w)_c^n = f_w(s_{k,l}^n)$  et  $(f_o)_c^n = f_o(s_{k,l}^n)$  si  $c \subset \Omega$  (cas des flux intérieurs) et  $M_{k,l}$  est l'élément du maillage ayant  $c$  comme côté commun avec  $M_{i,j}$ . Dans ce dernier cas, on note  $s_c = s_{k,l}^n$  (l'indice  $n$  est fixé). De (58), on déduit alors :

$$s_{i,j}^{n+1} = s_{i,j}^n + \frac{k_n}{h_x h_y \phi} \sum_{c \in C(M_{i,j})} \left( \frac{f_w(s_c)}{f_w(s_c) + f_w(s_c)} - \frac{f_w(s_{i,j}^n)}{f_w(s_{i,j}^n) + f_o(s_{i,j}^n)} \right) (H_{M_{i,j},c}^n)^-,$$

$$(i, j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\},$$

ou encore, en notant  $f$  la fonction  $f_w/(f_w + f_o)$  :

$$s_{i,j}^{n+1} = s_{i,j}^n + \frac{k_n}{h_x h_y \phi} \sum_{c \in C(M_{i,j})} (f(s_c) - f(s_{i,j}^n)) (H_{M_{i,j},c}^n)^-, \quad (59)$$

$$(i, j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}.$$

La fonction  $f$  est croissante. On note maintenant  $c_f$  la constante de Lipschitz de  $f$  sur  $[0, 1]$ , c'est-à-dire :

$$c_f = \sup \left\{ \frac{f(\sigma_1) - f(\sigma_2)}{\sigma_1 - \sigma_2}, \sigma_1, \sigma_2 \in [0, 1], \sigma_1 \neq \sigma_2 \right\}. \quad (60)$$

On déduit facilement de (59) que si  $s_c \in [0, 1]$  pour tout  $c$ , alors  $s_{i,j}^{n+1} \in [0, 1]$  pour tout  $(i, j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}$ , pourvu que  $k_n$  vérifie la condition suivante :

$$k_n \leq \frac{h_x h_y \phi}{c_f \sum_{c \in C(M_{i,j})} (H_{M_{i,j},c}^n)^-}, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}.$$

On pose :

$$\bar{h} = \min \left\{ \frac{h_x h_y \phi}{c_f \sum_{c \in C(M_{i,j})} (H_{M_{i,j},c}^n)^-}, (i, j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\} \right\},$$

et on prend  $k_n = \gamma \bar{h}$ , avec  $\gamma \leq 1$ . La quantité  $\gamma$  s'appelle "CFL" et la condition  $\gamma \leq 1$  s'appelle "condition CFL" (pour Courant-Friedrichs-Levy).

En pratique on prend, si possible,  $\gamma = 1$  (ceci donne le pas de temps appelé optimal dans la section 6).

Il est intéressant de noter que  $\bar{h}$  est de l'ordre de  $h$  si  $h_x$  et  $h_y$  sont de l'ordre de  $h$ . Ceci est dû au fait que les quantités  $H_{M_{i,j},c}^n$  sont (en général) aussi de l'ordre de  $h$ .

Il est aussi intéressant de remarquer que cette condition CFL est plus forte que celle qui suffirait pour avoir  $s_{i,j}^{n+1} \in [0, 1]$  pour tout  $(i, j)$ . Des exemples simples (même en une dimension d'espace, voir la section 3) montrent que, avec des pas de temps ne vérifiant pas  $k \leq \bar{h}$ , on peut avoir  $s_{i,j}^{n+1} \in [0, 1]$  pour tout  $(i, j)$ , mais que la solution approchée ne converge pas vers la bonne solution du problème lorsque les pas de discrétisation tendent vers 0.



## 4.2 Prise en compte des puits

On ajoute maintenant de puits, producteurs et injecteurs, dans le modèle simplifié de la section 4.1.

La prise en compte des puits dans les simulateurs de réservoirs est un problème difficile car le rayon d'un puits est de l'ordre de 10 cm et il n'est pas possible (actuellement), pour des raisons de coût de calculs, de faire un maillage à cette échelle centimétrique. Dans un simulateur de réservoir, la longueur d'un coté d'une maille est plutôt de l'ordre de 100 m. Un puits est représenté par des termes sources dans la maille contenant ce puits.

On suppose qu'il y a  $L$  puits, numérotés de 1 à  $L$ , et que chaque maille contient au plus un puits (en fait, seules quelques mailles contiennent un puits). Soit  $l \in \{1, \dots, L\}$  et  $M_{i,j}$  la maille contenant le puits numéro  $l$ . On remplace alors, pour cette valeur de  $(i, j)$ , les équations (48) par :

$$\begin{aligned} h_x h_y \phi \frac{s_{i,j}^{n+1} - s_{i,j}^n}{k_n} + \sum_{c \in C(M_{i,j})} F_{M_{i,j},c}^n &= q_{w,l}^n, \\ -h_x h_y \phi \frac{s_{i,j}^{n+1} - s_{i,j}^n}{k_n} + \sum_{c \in C(M_{i,j})} G_{M_{i,j},c}^n &= q_{o,l}^n, \end{aligned} \quad (61)$$

sans changer le calculer des quantités  $F_{M_{i,j},c}^n$ ,  $G_{M_{i,j},c}^n$ , toujours données, pour les flux intérieurs, par (49), (51) et, pour les flux extérieurs, par (52) ou (53) ou (54)-(55) selon la condition aux limites imposée sur le coté  $c$ .

Les quantités  $q_{w,l}^n$  et  $q_{o,l}^n$  sont les flux d'eau et d'huile au puits numéro  $l$ , entre les instants  $t_n$  et  $t_{n+1}$ . Si  $q_{w,l}^n > 0$ , il y a injection d'eau au puits numéro  $l$ . Si  $q_{w,l}^n < 0$ , il y a production d'eau au puits numéro  $l$ . De même pour l'huile en remplaçant  $w$  par  $o$ .

On distingue deux type de puits, les puits à débit imposé et les puits à pression imposée.

### 4.2.1 Puits à débit imposé

Soit  $l \in \{1, \dots, L\}$ . On suppose ici que le puits numéro  $l$  est à débit imposé. On pose alors  $q_l^n = q_{w,l}^n + q_{o,l}^n$ . La quantité  $q_l^n$  est le débit total au puits, elle est donnée. Les trois quantités  $q_l^n$ ,  $q_{w,l}^n$  et  $q_{o,l}^n$  sont supposées être de même signe. On distingue maintenant les cas  $q_l^n > 0$  et  $q_l^n < 0$ .

**Cas  $q_l^n > 0$ .** Nous sommes alors dans le cas d'un puits injecteur. En général, on injecte de l'eau et non de l'huile et on a donc :

$$q_{w,l}^n = q_l^n, \quad q_{o,l}^n = 0.$$

On peut également envisager le cas où l'on injecte un mélange d'eau et d'huile. En fait, actuellement, les pétroliers s'intéresse beaucoup au cas où l'on injecte du  $CO_2$ , à cause du problème des "gaz à effet de serre", mais il faut alors considérer des modèles plus complexes.

**Cas  $q_l^n < 0$ .** Nous sommes alors dans le cas d'un puits producteur. Le réservoir produit un mélange d'eau et d'huile. La répartition du débit total entre débit d'eau et débit d'huile se fait au prorata de la présence de l'eau et de l'huile dans la maille contenant le puits, notée toujours  $M_{i,j}$ , en tenant compte aussi de la facilité de chacune des phases à se déplacer, ceci donne :

$$\begin{aligned} q_{w,l}^n &= \frac{f_w(s_{i,j}^n)}{f_w(s_{i,j}^n) + f_o(s_{i,j}^n)} q_l^n, \\ q_{o,l}^n &= \frac{f_o(s_{i,j}^n)}{f_w(s_{i,j}^n) + f_o(s_{i,j}^n)} q_l^n. \end{aligned}$$

### 4.2.2 Puits à pression imposé

Soit  $l \in \{1, \dots, L\}$ . On suppose ici que le puits numéro  $l$  est à pression imposé. On pose toujours  $q_l^n = q_{w,l}^n + q_{o,l}^n$  mais la quantité  $q_l^n$  (qui est le débit total au puits) n'est plus donnée, c'est une inconnue du problème. Par contre la pression au puits, notée  $p_l$ , est connue. On la suppose constante en temps, pour simplifier. La généralisation au cas  $p_l$  variable en temps est facile.

On note  $M_{i,j}$  la maille contenant le puits. On suppose que le puits est au centre de la maille  $M_{i,j}$  (le traitement des puits décentrés dans la maille est possible mais demande un travail supplémentaire) et que tous les côtés de la maille  $M_{i,j}$  appartiennent à  $\Omega$ . Une première idée pourrait être d'ajouter l'équation  $p_{i,j}^{(n+1)} = p_l$ . Cette valeur  $p_l$  serait alors utilisée pour calculer les flux  $F_{M_{i,j},c}^n$  et  $G_{M_{i,j},c}^n$ , avec  $c \in C(M_{i,j})$ . Cette idée n'est pas bonne car la maille est de grande taille par rapport au diamètre du puits et la pression varie très rapidement au voisinage du puits. Par exemple, pour  $c = c_{i+1/2,j}$ , la quantité  $(p_{i+1,j}^{(n+1)} - p_l)/h_x$  est une mauvaise approximation de  $\partial p / \partial x$  sur  $c$  à l'instant  $t_{n+1}$ .

La technique utilisée par les simulateurs de réservoirs, décrite ci après, exploite la forme de la pression au voisinage du puits et le fait que la pression soit égale à  $p_l$  au bord du puits.

Dans le domaine  $\Omega$  privé des puits, les inconnues  $s$  et  $p$  doivent être solutions du système suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_s}{\partial t} - \operatorname{div}(f_w(s)K\nabla p) &= 0, \\ -\frac{\partial \phi_s}{\partial t} - \operatorname{div}(f_o(s)K\nabla p) &= 0. \end{aligned} \quad (62)$$

Soit  $B$  le domaine du puits, ce domaine est une boule fermée (dans le rayon est de l'ordre de 10 cm). Soit  $\omega$  un ouvert de  $\Omega$  contenant  $B$ , donc contenant le puits numéro  $l$ , et ne contenant aucun autre puits. Cet ouvert  $\omega$  peut être formé de quelques mailles dont la maille  $M$  contenant le puits.

En additionnant les deux équations de (62), on a, à l'instant  $t_{n+1}$  :

$$-\operatorname{div}((f_w(s) + f_o(s))K\nabla p) = 0 \text{ dans } \omega \setminus B.$$

Dans l'équation précédente, les inconnues,  $s$  et  $p$ , sont prises à l'instant  $t_{n+1}$ . On suppose que  $(f_w(s) + f_o(s))$  est une quantité constante dans  $\omega \setminus B$  ( $n$  est fixé). Ceci est faux, bien sûr, le point important est de remarquer que cette approximation consiste en fait à dire que  $(f_w(s) + f_o(s))$  varie beaucoup moins vite que  $p$  au voisinage du puits (ce qui est vrai). On pose alors  $m = (f_w(s) + f_o(s))K$ ,  $m$  est une constante et  $p$  est donc solution de :

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(m\nabla p) &= 0 \text{ dans } \omega \setminus B. \\ p &= p_l \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (63)$$

La première équation de (63) donne, en particulier :

$$\int_{\partial M} m\nabla p(x) \cdot n_M(x) d\gamma(x) = \int_{\partial B} m\nabla p(x) \cdot n_B(x) d\gamma(x),$$

où  $n_M$  est le vecteur normal  $\partial M$  extérieur à  $M$ ,  $n_B$  est le vecteur normal  $\partial B$  extérieur à  $B$ , et  $\gamma$  désigne la mesure de Lebesgue 1-dimensionnelle sur  $\partial M$  et  $\partial B$ .

On a aussi  $-\int_{\partial B} f_w(s)K\nabla p(x) \cdot n_B(x) d\gamma(x) = q_{w,l}^n$  et  $-\int_{\partial B} f_o(s)K\nabla p(x) \cdot n_B(x) d\gamma(x) = q_{o,l}^n$ . D'où l'on déduit :

$$-\int_{\partial M} m\nabla p(x) \cdot n_M(x) d\gamma(x) = -\int_{\partial B} m\nabla p(x) \cdot n_B(x) d\gamma(x) = q_l^n. \quad (64)$$

Les équations (63) et (64) suggèrent que la singularité de la fonction  $p(\cdot, t_{n+1})$  au voisinage du puits est comme celle de la solution de  $-\operatorname{div}(m\nabla \bar{p}) = q_l^n \delta_b$  dans  $\mathbb{R}^2$ , où  $\delta_b$  est la masse de Dirac au point  $b$ , centre

de  $B$ . Autrement dit, les termes sources dûs aux puits, notés  $h_w$  et  $h_o$  dans les équations (1)-(2), peuvent être vus comme des masses de Dirac portées par les centres des puits. Il faut noter ici que les puits sont transverses au plan dans lequel on résout les équations (1)-(2). Dans un modèle 3d, les termes sources dûs aux puits sont plutôt des mesures portées par des segments correspondant aux parties des puits en contact actif avec le milieu poreux (c'est-à-dire échangeant du fluide avec le milieu poreux).

Nous allons maintenant déterminer précisément la forme de la singularité de  $p$  au voisinage du puits. Pour simplifier les calculs, on va supposer que  $b = 0$ , on peut toujours se ramener à ce cas par un changement de variable.

L'écoulement au voisinage du puits est essentiellement radial, c'est-à-dire que  $m\nabla p \cdot n_B$  peut être considéré comme constant. On déduit alors de (64) :

$$m\nabla p \cdot n_B = -\frac{q_l^n}{2\pi r_l} \text{ sur } \partial B,$$

où  $r_l$  est le rayon du puits. On définit alors la fonction  $u$  sur  $\omega \setminus B$  par :

$$u(x) = \frac{q_l^n}{2\pi m} \ln(|x|) + p(x, t_{n+1}), \quad x \in \omega \setminus B, \quad (65)$$

où  $|x|$  désigne la norme euclidienne de  $x$ . On a donc :

$$\nabla u(x) \cdot n_B(x) = \frac{q_l^n}{2\pi m r_l} + \nabla p(x, t_{n+1}) \cdot n_B(x) = 0 \text{ pour tout } x \in \partial B.$$

En posant :

$$u = p_l + \frac{q_l^n}{2\pi m} \ln(r_l) \text{ sur } B,$$

on en déduit, en remarquant que  $\Delta(\ln(|x|)) = 0$  sur  $\omega \setminus B$  :

$$-\text{div}(m\nabla u) = 0, \text{ dans } \omega.$$

(En fait, on a plutôt  $-\text{div}(m\nabla u)$  "proche" de 0.) Cela signifie que la fonction  $u$  peut être considérée comme régulière dans  $\omega$ , contrairement à la fonction  $p(\cdot, t_{n+1})$ . On peut donc obtenir une approximation de  $\nabla u \cdot n_{M,c}$  pour  $c$  côté de  $M$ , comme nous avons fait pour  $\nabla p \cdot n_{M,c}$  dans la section 4.1. Si  $M = M_{i,j}$  et, par exemple,  $c = c_{i+1/2,j}$ , on approche donc  $\nabla u \cdot n_{M,c}$  par :

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_x},$$

où est une  $u_{i,j}$  et  $u_{i+1,j}$  sont des approximations de  $u$  dans les mailles  $M_{i,j}$  et  $M_{i+1,j}$ . Comme  $u = p_l + \frac{q_l^n}{2\pi m} \ln(r_l)$  sur  $B$  et donc au centre de la maille  $M$ , on prend :

$$u_{i,j} = p_l + \frac{q_l^n}{2\pi m} \ln(r_l).$$

D'autre part, la définition (65) de  $u$  dans  $\omega \setminus B$  suggère :

$$u_{i+1,j} = \frac{q_l^n}{2\pi m} \ln(h_x) + p_{i+1,j}^n.$$

L'approximation de  $\nabla u \cdot n_{M,c}$  est donc :

$$\frac{p_{i+1,j}^n - p_l}{h_x} + \frac{q_l^n}{2\pi m h_x} \ln\left(\frac{h_x}{r_l}\right).$$

Avec (65), on en déduit l'approximation de  $\nabla p \cdot n_{M,c} d$  et donc celle de  $\int_c \nabla p \cdot n_{M,c} d\gamma(x)$  et finalement celle de  $\int_c m \nabla p \cdot n_{M,c} d\gamma(x)$  :

$$-\frac{q_l^n}{\pi} \arctg\left(\frac{h_y}{h_x}\right) + \frac{m(p_{i+1,j} - p_l)h_y}{h_x} + \frac{q_l^n h_y}{2\pi h_x} \ln\left(\frac{h_x}{r_l}\right).$$

On rappelle que  $m = (f_w(s) + f_o(s))K$  et  $\int_c m \nabla p \cdot n_{M,c} d\gamma(x)$  est donc la quantité qui est approchée dans le schéma de la section 4.1 par  $F_{M,c} + G_{M,c}$ . On a donc trouvé une “bonne” valeur pour  $F_{M,c} + G_{M,c}$ . Toutefois cette approximation est différente de celle issue de (49). Pour retrouver la forme issue (49), on se restreint au cas  $h_x = h_y = h$ . On obtient :

$$F_{M,c} + G_{M,c} = -\frac{q_l^n}{4} + m(p_{i+1,j}^{(n+1)} - p_l) + \frac{q_l^n}{2\pi} \ln\left(\frac{h}{r_l}\right) = m(p_{i+1,j}^{(n+1)} - p_{i,j}^{(n+1)}),$$

en posant :

$$p_{i,j}^{(n+1)} = p_l + \frac{q_l^n}{4m} - \frac{q_l^n}{2\pi m} \ln\left(\frac{h}{r_l}\right),$$

ce qui peut aussi s'écrire :

$$q_l^n = I_l(f_w(s) + f_o(s))(p_l - p_{i,j}^{(n+1)}),$$

avec :

$$I_l = \frac{K}{-\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{h}{r_p}}. \quad (66)$$

La quantité  $I_l$  s'appelle “indice du puits numéro  $l$ ”. Elle dépend du maillage par l'intermédiaire de  $h$ .

Finalement, cette étude suggère donc de remplacer, pour la maille du puits numéro  $l$ , notée  $M_{i,j}$ , les équations (48) par (61) avec :

$$q_{w,l}^n = I_l(f_w)_l^n (p_l - p_{i,j}^{(n+1)}), \quad q_{o,l}^n = I_l(f_o)_l^n (p_l - p_{i,j}^{(n+1)}), \quad (67)$$

avec  $I_l$  donné par (66) et où les quantités  $(f_w)_l^n$  et  $(f_o)_l^n$  sont données par un décentrement amont similaire à (51) (ou éventuellement (50), si cela est nécessaire pour des raisons de stabilité) :

$$\begin{aligned} (f_w)_l^n &= f_w(s_{i,j}^n) \text{ et } (f_o)_c^n = f_o(s_{i,j}^n) \text{ si } p_{i,j}^n > p_l, \\ (f_w)_c^n &= f_w(s_l) \text{ et } (f_o)_c^n = f_o(s_l) \text{ si } p_{i,j}^n < p_l, \end{aligned} \quad (68)$$

avec  $s_l = 1$ , car, lorsque le puits est injecteur (ce qui correspond à  $p_{i,j}^n < p_l$ ), le fluide injecté ne contient que de l'eau. Bien sûr, si on injectait un mélange d'eau et d'huile, on prendrait alors la valeur correspondant à ce mélange pour  $s_l$  (et celle ci pourrait d'ailleurs dépendre de  $n$ ).

Enfin, on conserve (49), (51) pour calculer les quantités  $F_{M_{i,j},c}$  et  $G_{M_{i,j},c}$  pour  $c \in C(M_{i,j})$ .

On a donc simplement ajouté 2 inconnues (qui sont  $q_w(l)$  et  $q_{o,l}^n$ ) et 2 équations, données par (67), (68).

Avec la tricherie habituelle consistant à admettre que le décentrement amont donné avec  $p^{(n)}$  est le même que celui donné avec  $p^{(n+1)}$ , on peut aussi remarquer (et cela est important pour le calcul du pas de temps fait à la section suivante) que l'on a, dans tous les cas (puits à débit imposé ou puits à pression imposée), les formules suivantes :

$$q_{w,l}^n = \frac{(f_w)_l^n}{(f_w)_l^n + (f_o)_l^n} q_l^n, \quad q_{o,l}^n = \frac{(f_o)_l^n}{(f_w)_l^n + (f_o)_l^n} q_l^n, \quad (69)$$

où les quantités  $(f_w)_l^n$  et  $(f_o)_l^n$  sont données par :

$$\begin{aligned} (f_w)_l^n &= f_w(s_{i,j}^n) \text{ et } (f_o)_l^n = f_o(s_{i,j}^n) \text{ si } q_l^n < 0, \\ (f_w)_l^n &= f_w(s_l) \text{ et } (f_o)_l^n = f_o(s_l) \text{ si } q_l^n > 0, \end{aligned} \quad (70)$$

avec  $s_l = 1$ . On rappelle que  $q_l^n > 0$  correspond au fait que le puits numéro  $l$  est injecteur et que le fluide injecté ne contient que de l'eau.

### 4.2.3 Calcul de $p$ et $s$ , choix du pas de temps

Maintenant que les puits ont été pris en compte, le système à résoudre pour calculer  $\{s_{i,j}^{n+1}, p_{i,j}^{n+1}, (i, j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}\}$  est donc donné par (48), pour les mailles qui ne contiennent pas de puits, et (61) pour la maille contenant le puits  $l$ ,  $l \in \{1, \dots, L\}$ . Les flux intérieurs sont toujours donnés par (49),(51) et les flux extérieurs donnés, pour chaque bord de maille appartenant à  $\partial\Omega$ , par (52) ou (53) ou (54)-(55). Pour les puits à débit imposé, les quantités  $q_{w,l}^n$  et  $q_{o,l}^n$  sont connues. Pour chaque puits à pression imposée, on ajoute 2 inconnues,  $q_{w,l}^n$  et  $q_{o,l}^n$  pour le puits numéro  $l$ , et 2 équations, données par (67) pour le puits numéro  $l$ .

#### Calcul de $p$

Comment précédemment, on va d'abord calculer  $\{p_{i,j}^{n+1}, (i, j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}\}$  puis  $\{s_{i,j}^{n+1}, (i, j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}\}$ .

En additionnant les deux équations de (48) (pour les mailles sans puits) ou de (61) (pour les mailles avec un puits), on élimine les inconnues  $s_{i,j}^{n+1}$ . Les inconnues  $\{p_{i,j}^{n+1}, (i, j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}\}$  sont solutions du système linéaire de  $n_x n_y$  équations à  $n_x n_y$  inconnues, où les équations sont données par (56) pour les mailles ne contenant pas de puits et, pour la maille  $M_{i,j}$  contenant le puits  $l$ ,  $l \in \{1, \dots, L\}$  :

$$\sum_{c \in C(M_{i,j})} F_{M_{i,j},c}^n + G_{M_{i,j},c}^n = q_{w,l}^n + q_{o,l}^n. \quad (71)$$

Dans (71), le deuxième membre est une donnée dans le cas où le puits numéro  $l$  est à débit imposé, et est remplacé par les expressions données par (67) dans le cas où le puits numéro  $l$  est à pression imposée. D'autre part, les flux  $F$  et  $G$  sont toujours donnés par (49),(51) et les flux extérieurs sont donnés, pour chaque bord de maille appartenant à  $\partial\Omega$ , par (52) ou (53) ou (54)-(55).

On suppose que, pour chaque puits à pression imposée, l'indice de puits est strictement positif (ce qui revient à dire que  $h$  est "grand" par rapport à  $r_p$ , hypothèse "nécessaire" pour que le raisonnement fait pour le traitement des puits à pression imposée soit légitime). Le système linéaire à résoudre pour calculer  $\{p_{i,j}^{n+1}, (i, j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}\}$  est alors inversible si il y a au moins une condition aux limites à pression imposée (c'est-à-dire du type (54)-(55)) ou si il y a au moins un puits à pression imposée. En effet, comme dans la section 4.1.4, on peut montrer qu'après un choix d'ordre de numérotation des inconnues et des équations, ce système correspond alors à un système dont la matrice  $B$  est symétrique définie positive.

On donne dans la section 5.2 une méthode pour résoudre ce système utilisant la factorisation de la matrice  $A$  correspondant au problème sans puits, à condition d'avoir au moins une condition aux limites à pression imposée.

#### Calcul de $s$ , choix du pas de temps

Après avoir calculer  $\{p_{i,j}^{n+1}, (i, j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}\}$ , on peut calculer tous les flux d'eau sur les bords de mailles, c'est-à-dire  $F_{M_{i,j},c}^n$  pour tout  $(i, j)$  et tout  $c \in M_{i,j}$ . On connaît aussi les flux d'eau aux puits,  $q_{w,l}^n$  pour tout  $l \in \{1, \dots, L\}$ . Si  $k_n$  est connu, on peut donc calculer  $\{s_{i,j}^{n+1}, (i, j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}\}$  en utilisant la première équation de (48) pour les mailles ne contenant pas de puits et la première équation de (61) pour la maille contenant le puits  $l$  situé dans la maille  $M_{i,j}$ . On obtient ainsi :

$$s_{i,j}^{n+1} = s_{i,j}^n - \frac{k_n}{h_x h_y \phi} \sum_{c \in C(M_{i,j})} F_{M_{i,j},c}^n, \quad (72)$$

si la maille  $M_{i,j}$  ne contient pas de puits, et :

$$s_{i,j}^{n+1} = s_{i,j}^n - \frac{k_n}{h_x h_y \phi} \left( \sum_{c \in C(M_{i,j})} F_{M_{i,j},c}^n - q_{w,l}^n \right), \quad (73)$$

si la maille  $M_{i,j}$  contient le puits numéro  $l$ .

Il reste seulement à choisir le pas de temps  $k_n$ . Le choix du pas de temps  $k_n$  se fait comme dans la section 4.1.5. On souhaite, par exemple, que  $s_{i,j}^{n+1} \in [0, 1]$  pour tout  $(i, j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}$ . Comme cela a été remarqué à la section 4.1.5, on a :

$$F_{M_{i,j},c}^n = \frac{(f_w)_c^n}{(f_w)_c^n + (f_o)_c^n} (F_{M_{i,j},c}^n + G_{M_{i,j},c}^n),$$

pour tout  $c \in C(M_{i,j})$  et tout  $(i, j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}$ .

D'après (69), on a également, pour tout puits  $l \in \{1, \dots, L\}$  :

$$q_{w,l}^n = \frac{(f_w)_l^n}{(f_w)_l^n + (f_o)_l^n} q_l^n,$$

Ce qui donne, avec (72) :

$$s_{i,j}^{n+1} = s_{i,j}^n - \frac{k_n}{h_x h_y \phi} \sum_{c \in C(M_{i,j})} \frac{(f_w)_c^n}{(f_w)_c^n + (f_o)_c^n} (F_{M_{i,j},c}^n + G_{M_{i,j},c}^n),$$

si la maille  $M_{i,j}$  ne contient pas de puits, et :

$$s_{i,j}^{n+1} = s_{i,j}^n - \frac{k_n}{h_x h_y \phi} \left( \sum_{c \in C(M_{i,j})} \frac{(f_w)_c^n}{(f_w)_c^n + (f_o)_c^n} (F_{M_{i,j},c}^n + G_{M_{i,j},c}^n) - \frac{(f_w)_l^n}{(f_w)_l^n + (f_o)_l^n} q_l^n \right),$$

si la maille  $M_{i,j}$  contient le puits numéro  $l$ . On note, comme dans la section 4.1.5,  $H_{M_{i,j},c}^n = F_{M_{i,j},c}^n + G_{M_{i,j},c}^n$ . On utilise (56) pour les mailles sans puits et (71) pour les mailles avec puits, on obtient :

$$s_{i,j}^{n+1} = s_{i,j}^n - \frac{k_n}{h_x h_y \phi} \sum_{c \in C(M_{i,j})} \left( \frac{(f_w)_c^n}{(f_w)_c^n + (f_o)_c^n} - \frac{f_w(s_{i,j}^n)}{f_w(s_{i,j}^n) + f_o(s_{i,j}^n)} \right) H_{M_{i,j},c}^n, \quad (74)$$

si la maille  $M_{i,j}$  ne contient pas de puits, et :

$$s_{i,j}^{n+1} = s_{i,j}^n - \frac{k_n}{h_x h_y \phi} \left( \sum_{c \in C(M_{i,j})} \left( \frac{(f_w)_c^n}{(f_w)_c^n + (f_o)_c^n} - \frac{f_w(s_{i,j}^n)}{f_w(s_{i,j}^n) + f_o(s_{i,j}^n)} \right) H_{M_{i,j},c}^n \right. \\ \left. - \left( \frac{(f_w)_l^n}{(f_w)_l^n + (f_o)_l^n} - \frac{f_w(s_{i,j}^n)}{f_w(s_{i,j}^n) + f_o(s_{i,j}^n)} \right) q_l^n \right), \quad (75)$$

si la maille  $M_{i,j}$  contient le puits numéro  $l$ .

On raisonne maintenant comme dans la section 4.1.5, en admettant que le décentrement amont est le même selon qu'on utilise  $p^{(n)}$  ou  $p^{(n+1)}$ .

Si  $H_{M_{i,j},c}^n > 0$ , on a, par le choix du décentrement amont,  $(f_w)_c^n = f_w(s_{i,j}^n)$  et  $(f_o)_c^n = f_o(s_{i,j}^n)$ . Le facteur devant  $H_{M_{i,j},c}^n$  dans (74) ou (75) est donc nul.

Si  $H_{M_{i,j},c}^n < 0$ , on a  $(f_w)_c^n = f_w(s_c)$  et  $(f_o)_c^n = f_o(s_c)$  si  $c \subset \partial\Omega$  (cas des flux extérieurs) et  $(f_w)_c^n = f_w(s_{k,l}^n)$  et  $(f_o)_c^n = f_o(s_{k,l}^n)$  si  $c \subset \Omega$  (cas des flux intérieurs) et  $M_{k,l}$  est l'élément du maillage ayant  $c$  comme côté commun avec  $M_{i,j}$ . Dans ce dernier cas, on note  $s_c = s_{k,l}^n$  (l'indice  $n$  est fixé).

Si  $q_l^{(n)} < 0$ , on a, par le choix du décentrement amont,  $(f_w)_l^n = f_w(s_{i,j}^n)$  et  $(f_o)_l^n = f_o(s_{i,j}^n)$ . Le facteur devant  $q_l^{(n)}$  dans (75) est donc nul.

Enfin, Si  $q_l^{(n)} > 0$ , on a, par le choix du décentrement amont,  $(f_w)_l^n = f_w(s_l)$  et  $(f_o)_l^n = f_o(s_l)$ , avec  $s_l = 1$  (car on n'injecte que de l'eau).

De (74), on déduit alors, en notant  $f$  la fonction  $f_w/(f_w + f_o)$  :

$$s_{i,j}^{n+1} = s_{i,j}^n + \frac{k_n}{h_x h_y \phi} \sum_{c \in C(M_{i,j})} (f(s_c) - f(s_{i,j}^n))(H_{M_{i,j},c}^n)^-, \quad (76)$$

si la maille  $M_{i,j}$  ne contient pas de puits. De (75) on déduit :

$$s_{i,j}^{n+1} = s_{i,j}^n + \frac{k_n}{h_x h_y \phi} \left( \sum_{c \in C(M_{i,j})} (f(s_c) - f(s_{i,j}^n))(H_{M_{i,j},c}^n)^- + (f(s_l) - f(s_{i,j}^n))(q_l^{(n)})^+ \right), \quad (77)$$

si la maille  $M_{i,j}$  contient le puits numéro  $l$ .

On note  $E$  l'ensemble des indices  $(i, j)$  t.q.  $M_{i,j}$  ne contienne aucun puits, et on pose :

$$\underline{h} = \min \left\{ \frac{h_x h_y \phi}{c_f \sum_{c \in C(M_{i,j})} (H_{M_{i,j},c}^n)^-}, (i, j) \in J \right\}.$$

pour chaque  $l \in \{1, \dots, L\}$ , on pose

$$h_l = \frac{h_x h_y \phi}{c_f (\sum_{c \in C(M_{i,j})} (H_{M_{i,j},c}^n)^- + (q_l^{(n)})^+)}.$$

Dans la formule donnant  $h_l$ , on a, en général,  $(H_{M_{i,j},c}^n)^- = 0$ , pour tout  $c \in M_{i,j}$ , si  $q_l^{(n)} > 0$  (le puits est injecteur). Inversement, on a, en général,  $(H_{M_{i,j},c}^n)^- > 0$ , pour tout  $c \in M_{i,j}$ , si  $q_l^{(n)} < 0$  (le puits est producteur). On rappelle que  $c_f$  est donné par (60).

Enfin, on pose

$$\bar{h} = \min \{ \underline{h}, \min \{ h_l, l \in \{1, \dots, L\} \} \}.$$

Si  $k_n = \gamma \bar{h}$ , avec  $\gamma \leq 1$ , on obtient alors, en particulier,  $s_{i,j}^{n+1} \in [0, 1]$  pour tout  $(i, j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}$ .

On utilise en général  $k_n = \gamma \bar{h}$ , avec  $\gamma = 1$  (ce qui est noté "CFL=1" dans les tests de la section 6).

## 4.3 Quelques compléments

### 4.3.1 Prise en compte des hétérogénéités

On s'intéresse, dans cette section, à la prise en compte des hétérogénéités du milieu (elles sont, en général, très importantes). On suppose que la porosité est constante et que le milieu est isotrope. Le caractère hétérogène du milieu donne une perméabilité dépendante du point  $x \in \Omega$ . Le maillage est fait de manière à ce que cette perméabilité soit constante par maille. Pour la discrétisation des équations, la perméabilité est donc une grandeur scalaire dépendant de la maille. On note  $K_{i,j}$  la perméabilité de la maille  $M_{i,j}$ .

Il est assez facile aussi de considérer le cas d'un milieu anisotrope et hétérogène à condition de mailler de manière à ce que la perméabilité soit constante par maille et que les directions  $x$  et  $y$  soient les directions propre de la matrice de perméabilité (notée  $K_{i,j}$  dans la maille  $M_{i,j}$ ). Ce cas anisotrope n'est pas décrit ici.

Dans les équations discrètes, la perméabilité intervient seulement pour le calcul des flux : Dans la formule (49), pour les flux intérieurs, et dans la formule (54) pour les flux extérieurs associés à une condition aux limites à pression imposée.

Dans le cas des flux extérieurs, la prise en compte de l'hétérogénéité du milieu est très simple, on remplace (54) par :

$$F_{M,c} = h_y (f_w)_c^n K_{i,j} \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_c}{h_x/2}, \quad G_{M,c} = h_y (f_o)_c^n K_{i,j} \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_c}{h_x/2},$$

où  $(f_w)_c^n$  et  $(f_o)_c^n$  sont toujours donnés par (55). On rappelle aussi que dans la formule ci dessus, on a  $c = c_{i+1/2,j}$  (les autres cas se traitent de manière similaire) et que  $c \subset \Omega$  (et donc que  $i = n_x$ ).

Le cas des flux intérieurs est plus délicat. On pose  $M = M_{i,j}$ , avec  $(i,j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}$ , et on prend, par exemple,  $c = c_{i+1/2,j}$  (les autres cas se traitent de manière similaire). On suppose que  $c \subset \Omega$ , c'est-à-dire que  $i < n_x$ . Le côté  $c$  est donc aussi un coté de  $M_{i+1,j}$ . Pour trouver des approximations convenables pour  $F_{M,c}$  et  $G_{M,c}$ , on introduit une pression sur  $c$ , inconnue, notée  $p_c^{n+1}$ . Les approximations choisies pour  $F_{M,c}$  et  $G_{M,c}$  sont alors :

$$F_{M,c} = h_y (f_w)_c^n K_{i,j} \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_c^{n+1}}{h_x/2}, \quad G_{M,c} = h_y (f_o)_c^n K_{i,j} \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_c^{n+1}}{h_x/2}. \quad (78)$$

On a introduit une inconnue supplémentaire, notée  $p_c^{n+1}$ , qu'il faut calculer. En notant  $V$  la maille  $M_{i+1,j}$ , l'approximation suggérée par (78) de  $F_{V,c}$  et  $G_{V,c}$  est :

$$F_{V,c} = h_y (f_w)_c^n K_{i+1,j} \frac{p_{i+1,j}^{n+1} - p_c^{n+1}}{h_x/2}, \quad G_{V,c} = h_y (f_o)_c^n K_{i+1,j} \frac{p_{i+1,j}^{n+1} - p_c^{n+1}}{h_x/2}. \quad (79)$$

Dans (78) et (79), les quantités  $(f_w)_c^n$  et  $(f_o)_c^n$  sont toujours données par (51). En ayant introduit une seule pression sur  $c$ , on a implicitement tenu compte du fait que la pression était une fonction continue de  $x \in \Omega$ .

Pour déterminer  $p_c^{n+1}$ , on écrit simplement la continuité des flux, c'est-à-dire  $F_{M,c} = -F_{V,c}$  et  $G_{M,c} = -G_{V,c}$ , ou encore :

$$K_{i,j} \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_c^{n+1}}{h_x/2} = K_{i+1,j} \frac{p_c^{n+1} - p_{i+1,j}^{n+1}}{h_x/2}. \quad (80)$$

De (80) on déduit la valeur de  $p_c^{n+1}$  en fonction de  $p_{i,j}^{n+1}$  et  $p_{i+1,j}^{n+1}$  :

$$p_c^{n+1} = \frac{K_{i,j}}{K_{i+1,j} + K_{i,j}} p_{i,j}^{n+1} + \frac{K_{i+1,j}}{K_{i+1,j} + K_{i,j}} p_{i+1,j}^{n+1}.$$

En reportant cette valeur de  $p_c^{n+1}$  dans (78), on trouve l'approximation retenue pour  $F_{M,c}$  et  $G_{M,c}$  :

$$F_{M,c} = h_y (f_w)_c^n K_c \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i+1,j}^{n+1}}{h_x}, \quad G_{M,c} = h_y (f_o)_c^n K_c \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i+1,j}^{n+1}}{h_x},$$

avec :

$$K_c = \frac{2K_{i+1,j}K_{i,j}}{K_{i+1,j} + K_{i,j}},$$



c'est-à-dire que  $K_c$  est la moyenne harmonique de  $K_{i,j}$  et  $K_{i+1,j}$ . L'approximation retenue pour  $F_{M,c}$  et  $G_{M,c}$  est donc (49) en remplaçant  $K$  par  $K_c$ .

Il est intéressant aussi de traiter le cas de mailles de tailles variables. En considérant toujours le côté  $c = c_{i+1/2,j}$ , commun aux mailles  $M = M_{i,j}$  et  $V = M_{i+1,j}$ , on note  $h_x(i,j)$  la taille (dans la direction  $x$ ) de la maille  $M_{i,j}$  et  $h_x(i+1,j)$  la taille (dans la direction  $x$ ) de la maille  $M_{i+1,j}$ . Les tailles dans la direction  $y$  des mailles  $M$  et  $V$  sont nécessairement les mêmes et égales à la longueur de  $c$ , on note toujours  $h_y$  cette longueur de  $c$ . En utilisant toujours l'inconnue supplémentaire  $p_c^{n+1}$ , les approximations choisies pour  $F_{M,c}$ ,  $G_{M,c}$ ,  $F_{V,c}$  et  $G_{V,c}$  sont maintenant :

$$F_{M,c} = h_y (f_w)_c^n K_{i,j} \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_c^{n+1}}{h_x(i,j)/2}, \quad G_{M,c} = h_y (f_o)_c^n K_{i,j} \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_c^{n+1}}{h_x(i,j)/2}$$

et

$$F_{V,c} = h_y (f_w)_c^n K_{i+1,j} \frac{p_{i+1,j}^{n+1} - p_c^{n+1}}{h_x(i+1,j)/2}, \quad G_{V,c} = h_y (f_o)_c^n K_{i+1,j} \frac{p_{i+1,j}^{n+1} - p_c^{n+1}}{h_x(i+1,j)/2}.$$

On écrit la continuité des flux, c'est-à-dire  $F_{M,c} = -F_{V,c}$  et  $G_{M,c} = -G_{V,c}$ , elle donne :

$$K_{i,j} \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_c^{n+1}}{h_x(i,j)/2} = K_{i+1,j} \frac{p_c^{n+1} - p_{i+1,j}^{n+1}}{h_x(i+1,j)/2}.$$

On déduit de cette relation la valeur de  $p_c^{n+1}$  en fonction de  $p_{i,j}^{n+1}$  et  $p_{i+1,j}^{n+1}$  :

$$p_c^{n+1} = \frac{\frac{K_{i,j}}{h_x(i,j)}}{\frac{K_{i+1,j}}{h_x(i+1,j)} + \frac{K_{i,j}}{h_x(i,j)}} p_{i,j}^{n+1} + \frac{\frac{K_{i+1,j}}{h_x(i+1,j)}}{\frac{K_{i+1,j}}{h_x(i+1,j)} + \frac{K_{i,j}}{h_x(i,j)}} p_{i+1,j}^{n+1}.$$

En reportant cette valeur de  $p_c^{n+1}$  dans les formules donnant  $F_{M,c}$  et  $G_{M,c}$ , on trouve l'approximation retenue pour  $F_{M,c}$  et  $G_{M,c}$  :

$$F_{M,c} = h_y (f_w)_c^n K_c \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i+1,j}^{n+1}}{h_x(c)}, \quad G_{M,c} = h_y (f_o)_c^n K_c \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i+1,j}^{n+1}}{h_x(c)},$$

avec  $h_x(c) = \frac{h_x(i,j) + h_x(i+1,j)}{2}$  et :

$$K_c = \frac{K_{i+1,j} \frac{2h_x(c)}{h_x(i+1,j)} K_{i,j} \frac{2h_x(c)}{h_x(i,j)}}{K_{i+1,j} \frac{2h_x(c)}{h_x(i+1,j)} + K_{i,j} \frac{2h_x(c)}{h_x(i,j)}}.$$

L'approximation retenue pour  $F_{M,c}$  et  $G_{M,c}$  est donc toujours (49) en remplaçant  $K$  par cette valeur de  $K_c$  et  $h_x$  par  $h_x(c)$ .

### 4.3.2 Prise en compte de la gravité

On reprend ici le modèle simplifié décrit dans la section 4.1 et on prend en compte maintenant l'influence de la gravité. Il est, bien sûr, possible d'ajouter la prise en compte des hétérogénéités du milieu (section 4.3.1), des maillages à pas variables (section 4.3.1) et des puits (section 4.2). On peut toutefois remarquer que la justification du fait de prendre, à l'interface entre deux mailles, la moyenne harmonique de la perméabilités des mailles (exposée dans la section 4.3.1) n'est plus tout à fait correcte quand on ajoute le terme de gravité.

Les équations à résoudre sont toujours les équations (38)-(39) avec les équations (40)-(41) modifiées de manière à tenir compte de la gravité :

$$v_w = -f_w(s)K(\nabla p - \rho_w g), \text{ dans } \Omega \times ]0, T[, \quad (81)$$

$$v_o = -f_o(s)K(\nabla p - \rho_o g), \text{ dans } \Omega \times ]0, T[. \quad (82)$$

Les fonctions  $f_w$  et  $f_o$  sont les mêmes que dans la section 4.1. Les quantités  $\rho_w$  et  $\rho_o$  sont les masses volumiques des deux phases. Ce sont des constantes. Le vecteur  $g$  est le vecteur constant donné par la gravité. On suppose que la direction  $y$  est la direction verticale, et que  $g$  “pointe vers le bas”, de sorte que  $g = (0, -\underline{g})^t$  avec  $\underline{g} \in \mathbb{R}_+$ .

A ces équations, il faut ajouter les conditions initiales et des conditions aux limites, comme dans la section 4.1.

Dans les équations (38)-(39) on peut aussi remplacer  $v_w$  et  $v_o$  par les expressions données en (81)-(82). Le système à résoudre est alors équivalent au système suivant, de 2 équations à 2 inconnues ( $s$  et  $p$ ) :

$$\frac{\partial \phi s}{\partial t} - \operatorname{div}(f_w(s)K(\nabla p - \rho_w g)) = 0 \text{ dans } \Omega \times ]0, T[,$$

$$\frac{\partial \phi(1-s)}{\partial t} - \operatorname{div}(f_o(s)K(\nabla p - \rho_o g)) = 0 \text{ dans } \Omega \times ]0, T[.$$

En additionnant les deux équations, ce système est équivalent au système suivant :

$$-\operatorname{div}(v) = 0, \quad v = (f_w(s) + f_o(s))K\nabla p - K(f_w(s)\rho_w + f_o(s)\rho_o) \text{ dans } \Omega \times ]0, T[,$$

$$\frac{\partial \phi s}{\partial t} - \operatorname{div}\left(\frac{f_w(s)}{f_w(s) + f_o(s)}v + \frac{Kf_w(s)f_o(s)(\rho_o - \rho_w)}{f_w(s) + f_o(s)}\right) = 0 \text{ dans } \Omega \times ]0, T[.$$

Ici aussi ce système peut être vu comme une équation elliptique linéaire sur  $p$ , pour  $s$  donnée, couplée à une équation hyperbolique (non linéaire, en général) sur  $s$ , pour  $v$  donnée.

On reprend la discrétisation de la section 4.1. Avec les mêmes notations que dans la section 4.1, la seule différence apparaît dans le calcul de  $F_{M_{i,j},c}^n$  et  $G_{M_{i,j},c}^n$  qui sont maintenant des approximations de l'intégrale  $-f_w(s)K(\nabla p - \rho_w g) \cdot n_{M_{i,j},c}$  et  $-f_o(s)K(\nabla p - \rho_o g) \cdot n_{M_{i,j},c}$  sur  $c$ , entre les temps  $t_n$  et  $t_{n+1}$ .

Comme  $g = (0, -\underline{g})^t$ , le terme de gravité n'intervient pas pour les arrêtes parallèles à la direction  $x$ , c'est-à-dire pour les côtés  $c = c_{i\pm 1/2,j}$ . On donne maintenant les approximations de  $F_{M,c}^n$  et  $G_{M,c}^n$  si  $M = M_{i,j}$ ,  $(i,j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}$ , et  $c = c_{i,j+1/2}$  (le traitement de  $c = c_{i,j-1/2}$  est, bien sûr, similaire).

On considère tout d'abord le cas d'un flux intérieur, c'est-à-dire  $j < n_y$  (et donc  $c \subset \Omega$ ). Les approximations choisies pour  $F_{M,c}$  et  $G_{M,c}$  sont alors :

$$F_{M,c} = h_x(f_w)_c^n K\left(\frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j+1}^{n+1}}{h_y} - \rho_w \underline{g}\right), \quad G_{M,c} = h_x(f_o)_c^n K\left(\frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i+1,j+1}^{n+1}}{h_y} - \rho_o \underline{g}\right),$$

où  $(f_w)_c^n$  et  $(f_o)_c^n$  sont des approximations décentrées de  $f_w(s)$  et  $f_o(s)$  sur  $c$  à l'instant  $t_n$ , tenant compte de  $\underline{g}$  :

$$\begin{aligned} (f_w)_c^n &= f_w(s_{i,j}^n) \text{ si } p_{i,j}^{n+1} > p_{i,j+1}^{n+1} + \rho_w \underline{g} h_y, \\ (f_w)_c^n &= f_w(s_{i,j+1}^n) \text{ si } p_{i,j}^{n+1} < p_{i,j+1}^{n+1} + \rho_w \underline{g} h_y, \\ (f_o)_c^n &= f_o(s_{i,j}^n) \text{ si } p_{i,j}^{n+1} > p_{i,j+1}^{n+1} + \rho_o \underline{g} h_y, \\ (f_o)_c^n &= f_o(s_{i,j+1}^n) \text{ si } p_{i,j}^{n+1} > p_{i,j+1}^{n+1} + \rho_o \underline{g} h_y. \end{aligned}$$

Comme on ne connaît pas  $p_{i,j}^{n+1}$  et  $p_{i,j+1}^{n+1}$ , on remplace, en général,  $n+1$  par  $n$  dans les formules précédentes (comme dans la section 4.1), ce qui donne finalement :

$$\begin{aligned} (f_w)_c^n &= f_w(s_{i,j}^n) \text{ si } p_{i,j}^n > p_{i,j+1}^n + \rho_w \underline{g} h_y, \\ (f_w)_c^n &= f_w(s_{i,j+1}^n) \text{ si } p_{i,j}^n < p_{i,j+1}^n + \rho_w \underline{g} h_y, \\ (f_o)_c^n &= f_o(s_{i,j}^n) \text{ si } p_{i,j}^n > p_{i,j+1}^n + \rho_o \underline{g} h_y, \\ (f_o)_c^n &= f_o(s_{i,j+1}^n) \text{ si } p_{i,j}^n > p_{i,j+1}^n + \rho_o \underline{g} h_y. \end{aligned}$$

Une conséquence de la gravité est donc que le décentrement n'est pas toujours identique pour les deux phases.

On considère tout d'abord le cas d'un flux extérieur, c'est-à-dire  $j = n_y$  (et donc  $c = c_{i,j+1/2} \subset \partial\Omega$ ). Les approximations choisies pour  $F_{M,c}$  et  $G_{M,c}$  dépendent alors des conditions aux limites sur  $c$ . Il n'y a pas de changement (par rapport à la section 4.1) pour les conditions aux limites de flux nul ou à flux imposé (bien que ceci pourrait être discuté). Le terme de gravité intervient pour les conditions à pression imposée. Les données sont ici une pression, notée  $p_c$ , et une saturation, notée  $s_c$ . la pression  $p_c$  est la pression sur  $c$  et la saturation  $s_c$  donne la composition du fluide à l'extérieur du réservoir. Les choix pour  $F_{M,c}$  et  $G_{M,c}$  sont alors :

$$F_{M,c} = h_x (f_w)_c^n K \left( \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_c}{h_y/2} - \rho_w \underline{g} \right), \quad G_{M,c} = h_x (f_o)_c^n K \left( \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_c}{h_y/2} - \rho_o \underline{g} \right),$$

où  $(f_w)_c^n$  et  $(f_o)_c^n$  sont des approximations décentrées de  $f_w(s)$  et  $f_o(s)$  sur  $c$  à l'instant  $t_n$ , tenant compte de la gravité (et des pressions au temps  $t_n$  pour simplifier) :

$$\begin{aligned} (f_w)_c^n &= f_w(s_{i,j}^n) \text{ si } p_{i,j}^n > p_c + \rho_w \underline{g} \frac{h_y}{2}, \\ (f_w)_c^n &= f_w(s_c) \text{ si } p_{i,j}^n < p_c + \rho_w \underline{g} \frac{h_y}{2}, \\ (f_o)_c^n &= f_o(s_{i,j}^n) \text{ si } p_{i,j}^n > p_c + \rho_o \underline{g} \frac{h_y}{2}, \\ (f_o)_c^n &= f_o(s_c) \text{ si } p_{i,j}^n < p_c + \rho_o \underline{g} \frac{h_y}{2}. \end{aligned}$$

Il est, bien sûr, facile de généraliser cette condition aux limites en prenant  $p_c$  et  $s_c$  variables en temps.

Il est aussi intéressant de remarquer que le choix ce décentrement (appelé "phase par phase", car il peut être différent selon la phase considérée) assure bien, par exemple, qu'il n'y a pas d'huile (plus légère que l'eau) qui rentre par la base du réservoir si celui ci est au dessus d'un aquifère. En effet, dans ce cas, on a  $j = 1$  et l'effet de la gravité peut donner  $p_{i,1}^n < p_c - \rho_o \underline{g} (h_y/2)$  (et donc que le flux pour la phase huile est "rentrant", c'est-à-dire  $G_{M,c} \leq 0$ ) mais le fait que  $s_c = 1$  donne  $(f_o)_c^n = 0$  et donc  $G_{M,c} = 0$ .

### 4.3.3 Unités pétrolières

Les équations continues et discrètes données dans cette section 4 sont correctes lorsque l'on utilise pour les paramètres, les inconnues et les variables des unités cohérentes. On peut utiliser, par exemple, les unités appelées *SI* (pour Système International) mais on est alors amené à utiliser des nombres très grands ou très petits (la perméabilité de l'argile, par exemple, est de l'ordre de  $10^{-17} m^2$ ). Il est préférable d'utiliser des unités plus appropriées. Cela est possible, bien sûr, à condition de tenir compte des facteurs entre les différents unités.

- La perméabilité est donnée en *mdarcy*. Un *mdarcy* correspond à  $10^{-15} m^2$ . Si on note  $\bar{K}$  la perméabilité en *mdarcy* et  $K$  celle en *SI*, on a donc  $K = 10^{-15} \bar{K}$ .

- La viscosité est donnée en *centipoise*. Une *centipoise* correspond à  $10^{-3} \text{ pa} \cdot \text{s}$ . Si on note  $\bar{\mu}_p$  (pour  $p = o, w$ ) la viscosité de la phase  $p$  et  $\mu_p$  celle en *SI*, on a donc  $\mu_p = 10^{-3} \bar{\mu}_p$ . On a donc aussi  $f_p(s) = r_p(s)/\mu_p = (10^3)r_p(s)/\bar{\mu}_p = (10^3)\bar{f}_p(s)$  (la quantité  $r_p(s)$  est sans dimension, comme la saturation et comme la porosité).
- Les masses volumiques sont données en  $\text{kg}/\text{m}^3$  (et donc en *SI*). La masse volumique de l'eau est d'environ  $1000 \text{ kg}/\text{m}^3$  et une valeur possible pour celle de l'huile est  $800 \text{ kg}/\text{m}^3$ .
- La pression est donnée en *bar*. Un *bar* correspond à  $10^5 \text{ pa}$ . Si on note  $\bar{p}$  la pression donnée en *bar* et  $p$  celle en *SI*, on a donc  $p = 10^5 \bar{p}$ .

On montre maintenant comment sont les équations à résoudre dans le cas des sections 4.1-4.2

### calcul de $p$

Le système à résoudre pour trouver les inconnues  $\{p_{i,j}^{n+1}, (i,j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}\}$ , est donné par (56) pour les mailles ne contenant pas de puits et, pour la maille  $M_{i,j}$  contenant le puits  $l$ ,  $l \in \{1, \dots, L\}$ , par (71). On le remplace par le système équivalent obtenu en prenant les inconnues et les paramètres en unités pétrolières, c'est-à-dire :

$$\sum_{c \in C(M_{i,j})} \bar{F}_{M_{i,j},c}^n + \bar{G}_{M_{i,j},c}^n = 0,$$

si la maille  $M_{i,j}$  ne contient pas de puits et

$$\sum_{c \in C(M_{i,j})} \bar{F}_{M_{i,j},c}^n + \bar{G}_{M_{i,j},c}^n = \bar{q}_{w,l}^n + \bar{q}_{o,l}^n,$$

si la maille  $M_{i,j}$  contient le puits  $l$ ,  $l \in \{1, \dots, L\}$ .

Le calcul de  $\bar{F}_{M,c}$  et de  $\bar{G}_{M,c}$  est le même que celui de  $F_{M,c}$  et de  $G_{M,c}$  mais en utilisant les unités pétrolières. On le détaille ci après.

on prend toujours l'exemple  $M = M_{i,j}$  et  $c = c_{i+1/2,j}$  Pour les flux intérieurs, avec les notations précédentes, la formule (49) donne donc :

$$\begin{aligned} \bar{F}_{M,c} &= h_y (\bar{f}_w)_c^n \bar{K} \frac{\bar{p}_{i,j}^{n+1} - \bar{p}_{i+1,j}^{n+1}}{h_x} = (10^7) h_y (f_w)_c^n K \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i+1,j}^{n+1}}{h_x} = (10^7) F_{M,c} \\ \bar{G}_{M,c} &= h_y (\bar{f}_o)_c^n \bar{K} \frac{\bar{p}_{i,j}^{n+1} - \bar{p}_{i+1,j}^{n+1}}{h_x} = (10^7) h_y (f_o)_c^n K \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i+1,j}^{n+1}}{h_x} = (10^7) G_{M,c}. \end{aligned}$$

Pour les flux extérieurs correspondant à une condition aux limites à pression imposée, on obtient, avec (54) :

$$\begin{aligned} \bar{F}_{M,c} &= h_y (\bar{f}_w)_c^n \bar{K} \frac{\bar{p}_{i,j}^{n+1} - \bar{p}_c}{h_x/2} = (10^7) h_y (f_w)_c^n K \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_c}{h_x/2} = (10^7) F_{M,c}, \\ \bar{G}_{M,c} &= h_y (\bar{f}_o)_c^n \bar{K} \frac{\bar{p}_{i,j}^{n+1} - \bar{p}_c}{h_x/2} = (10^7) h_y (f_o)_c^n K \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_c}{h_x/2} = (10^7) G_{M,c}. \end{aligned}$$

Pour un puits à pression imposée, le calcul de  $\bar{q}_{w,l}^n$  et  $\bar{q}_{o,l}^n$  (où  $l$  est le numéro du puits) est conforme à celui de  $F_{M,c}$  et  $G_{M,c}$ . On peut l'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \bar{q}_{w,l}^n &= \bar{I}_l (\bar{f}_w)_l^n (\bar{p}_l - \bar{p}_{i,j}^{(n+1)}) = (10^7) I_l (f_w)_l^n (p_l - p_{i,j}^{(n+1)}) = (10^7) q_{w,l}^n, \\ \bar{q}_{o,l}^n &= \bar{I}_l (\bar{f}_o)_l^n (\bar{p}_l - \bar{p}_{i,j}^{(n+1)}) = (10^7) I_l (f_o)_l^n (p_l - p_{i,j}^{(n+1)}) = (10^7) q_{o,l}^n, \end{aligned}$$

avec :

$$\bar{I}_l = \frac{\bar{K}}{-\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{h}{r_p}} = \frac{(10^{15})K}{-\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{h}{r_p}} = (10^{15})I_l.$$

### Calcul de $s$

On rappelle que le calcul de  $\{s_{i,j}^{n+1} \mid (i,j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}\}$  se fait en utilisant la première équation de (48) pour les mailles ne contenant pas de puits et la première équation de (61) pour la maille contenant le puits  $l$  situé dans la maille  $M_{i,j}$ , c'est-à-dire :

$$s_{i,j}^{n+1} = s_{i,j}^n - \frac{k_n}{h_x h_y \phi} \sum_{c \in C(M_{i,j})} F_{M_{i,j},c}^n,$$

si la maille  $M_{i,j}$  ne contient pas de puits, et :

$$s_{i,j}^{n+1} = s_{i,j}^n - \frac{k_n}{h_x h_y \phi} \left( \sum_{c \in C(M_{i,j})} F_{M_{i,j},c}^n - q_{w,l}^n \right),$$

si la maille  $M_{i,j}$  contient le puits numéro  $l$ .

En utilisant les unités pétrolières, et en notant  $\bar{k}_n = 10^{-7} k_n$ , ceci donne :

$$s_{i,j}^{n+1} = s_{i,j}^n - \frac{\bar{k}_n}{h_x h_y \phi} \sum_{c \in C(M_{i,j})} \bar{F}_{M_{i,j},c}^n,$$

si la maille  $M_{i,j}$  ne contient pas de puits, et :

$$s_{i,j}^{n+1} = s_{i,j}^n - \frac{\bar{k}_n}{h_x h_y \phi} \left( \sum_{c \in C(M_{i,j})} \bar{F}_{M_{i,j},c}^n - \bar{q}_{w,l}^n \right),$$

si la maille  $M_{i,j}$  contient le puits numéro  $l$ .

Enfin, la restriction sur le pas de temps (contrainte appelée "CFL") peut également s'écrire sur  $\bar{k}_n$ , en utilisant les unités pétrolières. On note  $E$  l'ensemble des indices  $(i,j)$  t.q.  $M_{i,j}$  ne contienne aucun puits, et on pose :

$$\bar{h} = \min \left\{ \frac{h_x h_y \phi}{c_f \sum_{c \in C(M_{i,j})} (\bar{H}_{M_{i,j},c}^n)^-}, (i,j) \in J \right\},$$

avec  $\bar{H}_{M_{i,j},c}^n = (10^7) H_{M_{i,j},c}^n$ . Pour chaque  $l \in \{1, \dots, L\}$ , on pose

$$\bar{h}_l = \frac{h_x h_y \phi}{c_f (\sum_{c \in C(M_{i,j})} (\bar{H}_{M_{i,j},c}^n)^- + (\bar{q}_l^{(n)})^+)}.$$

Enfin, on pose

$$\bar{h} = \min \{ \bar{h}, \min \{ \bar{h}_l, l \in \{1, \dots, L\} \} \}.$$

La condition sur le pas de temps est alors :  $\bar{k}_n = \gamma \bar{h}$ , avec  $\gamma \leq 1$ .

Un pas de temps  $\bar{k}_n$  égal à 1 correspond à  $k_n = 10^7$  secondes, c'est-à-dire à environ 120 jours.

## 5 Remarques sur la programmation

### 5.1 Calcul de la pression sans tenir compte des puits

Dans le cadre de la section 4.1, à chaque temps  $t_n$ , l'ensemble des inconnues  $\{p_{i,j}^{n+1}, (i,j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}\}$  est solution du système linéaire de  $n_x n_y$  équations à  $n_x n_y$  inconnues (56), où les flux  $F$  et  $G$  sont donnés par (49),(51) et les flux extérieurs donnés, pour chaque bord de maille appartenant à  $\partial\Omega$ , par (52) ou (53) ou (54)-(55). La prise en compte des hétérogénéités, de pas variables ou de la gravité (sections 4.3.1 et 4.3.2) donnent des systèmes semblables.

Nous allons résoudre ce système linéaire en utilisant la méthode de Cholewski. Pour cela, nous allons mettre le système sous la forme  $Au = b$  où  $A$  est une matrice  $N \times N$ , avec  $N = n_x n_y$ , symétrique définie positive,  $u$  est le vecteur des  $N$  inconnues et  $b$  est le second membre. La structure de la matrice  $A$  dépend de l'ordre dans lequel on prend les inconnues et les équations du système linéaire (56) et le coût de la résolution de système linéaire sur un ordinateur dépend de cet ordre. Nous numérotions les inconnues en utilisant un ordre dit "naturel" (en fait, il y a des numérotations plus efficaces du point de vue du coût des calculs, les pétroliers utilisent généralement une numérotation appelée "rouge-noir") et nous prenons les équations dans l'ordre correspondant :

Pour  $(i,j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}$ , on pose  $m = n_x(n_y - j) + i$  et  $u_m = P_{i,j}^{n+1}$ . L'équation (56) pour cette valeur de  $i, j$  donne la ligne numéro  $m$  du système  $Au = b$ . On peut donc construire  $A$  et  $b$ .

La matrice  $A$  est symétrique définie positive et très "creuse" (elle a beaucoup de termes nuls). Il est inutile de "stocker" cette machine complètement dans l'ordinateur. Plus précisément, on note  $a_{i,j}$  le terme de  $A$  correspondant à la ligne numéro  $i$  et la colonne numéro  $j$  (bien noter que  $i$  et  $j$  n'ont ici aucun point commun avec les  $i$  et  $j$  du paragraphe précédent). Pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$ , il existe  $p(i) \in \{1, \dots, i\}$  t.q.  $a_{i,p(i)} \neq 0$  et  $a_{i,j} = 0$  si  $j < p(i)$ . On ne stocke que les valeurs de  $a_{i,j}$  pour  $p(i) \leq j \leq i$ .

La première étape de la méthode de Cholewski consiste à calculer la matrice  $L$  triangulaire inférieure t.q.  $A = LL^t$ . Si on note  $l_{i,j}$  le terme de  $L$  correspondant à la ligne numéro  $i$  et la colonne numéro  $j$ , il est assez facile de remarquer que  $l_{i,j} = 0$  si  $j < p(i)$ . on peut donc calculer  $L$  et la stocker à la place de  $A$ . Puis, la deuxième étape de la méthode de Cholewski consiste à résoudre  $Lv = b$  (étape appelée "descente") et enfin  $L^t u = v$  (étape appelée "remontée").

### 5.2 Calcul de la pression avec les puits

On veut résoudre ici le système linéaire sur  $\{p_{i,j}^{n+1}, (i,j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}\}$  donné dans la section 4.2.

On rappelle que les inconnues  $\{p_{i,j}^{n+1}, (i,j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}\}$  sont solutions du système linéaire de  $n_x n_y$  équations à  $n_x n_y$  inconnues, où les équations sont données par (56) pour les mailles ne contenant pas de puits et, pour la maille  $M_{i,j}$  contenant le puits  $l$ ,  $l \in \{1, \dots, L\}$  :

$$\sum_{c \in C(M_{i,j})} F_{M_{i,j},c}^n + G_{M_{i,j},c}^n = q_l^n. \quad (83)$$

Dans (83), le deuxième membre est une donnée dans le cas où le puits numéro  $l$  est à débit imposé, et est remplacé par les expressions données par (67) dans le cas où le puits numéro  $l$  est à pression imposée, il est alors inconnu. D'autre part, les flux  $F$  et  $G$  sont toujours donnés par (49),(51) et les flux extérieurs sont donnés, pour chaque bord de maille appartenant à  $\partial\Omega$ , par (52) ou (53) ou (54)-(55) (dans le cas d'un problème hétérogène, il faut modifier les formules donnant les flux comme cela est indiqué dans la section 4.3.1).

On suppose toujours (comme dans la section 5.1) qu'il y a au moins une condition aux limites à pression imposée. On suppose aussi que les puits à pression imposée correspondent aux numéros  $l \in \{1, \dots, \underline{L}\}$ .

En utilisant la même numérotation des inconnues et des équations que dans la section 5.1, le système à résoudre devient :

$$Au = b_0 + \sum_{l=1}^{\underline{L}} q_l^n b_l,$$

où :

- $A$  est la matrice symétrique définie positive obtenue à la section 5.1,
- $b_0$  est le deuxième membre obtenu avec les conditions aux limites (donc, le même que dans la section 5.1) et les puits à débit imposé, ce vecteur est donc connu.
- pour  $l \in \{1, \dots, \underline{L}\}$ ,  $b_l$  est le deuxième membre dont toutes les composantes sont nulles sauf pour l'équation associée à la maille contenant le puits numéro  $l$ . Dans cette équation, la valeur de la composante de  $b_l$  est égale à 1.

On note  $\{p_{0,i,j}^{n+1}, (i, j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}\}$  l'ensemble des pressions obtenues en résolvant  $Au = b_0$ . Pour  $l \in \{1, \dots, \underline{L}\}$ , on note  $\{p_{l,i,j}^{n+1}, (i, j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}\}$  l'ensemble des pressions obtenues en résolvant  $Au = b_l$ . Tous ces calculs utilisent donc une seule fois la factorisation de la matrice  $A$ . Cette factorisation est utilisée pour résoudre  $(\underline{L} + 1)$  systèmes avec des seconds membres connus.

La solution du problème est alors :

$$p_{i,j}^{n+1} = p_{0,i,j}^{n+1} + \sum_{l=1}^{\underline{L}} q_l^n p_{l,i,j}^{n+1}, (i, j) \in \{1, \dots, n_x\} \times \{1, \dots, n_y\}.$$

Pour calculer les  $q_l^n$  (d'où l'on déduit les valeurs des  $p_{i,j}^{n+1}$ ), il suffit maintenant de résoudre le système linéaire de  $\underline{L}$  inconnues (les  $q_l^n$  pour  $l \in \{1, \dots, \underline{L}\}$ ) à  $\underline{L}$  équations données par (67), (68), c'est-à-dire, pour  $l \in \{1, \dots, \underline{L}\}$  :

$$q_l^n = I_l((f_w)_l^n + (f_o)_l^n)(p_l - p_{0,i,j}^{n+1} - \sum_{l=1}^{\underline{L}} q_l^n p_{l,i,j}^{n+1}),$$

où  $M_{i,j}$  est la maille contenant le puits numéro  $l$  et les quantités  $(f_w)_l^n$  et  $(f_o)_l^n$  sont données par (68). On peut d'ailleurs montrer que ce système admet une et une seule solution.

### 5.3 Remarques sur fortran 90 et graphiques en matlab

Il est conseillé d'écrire le programme en fortran 90, en profitant des facilités de l'allocation dynamique. Je donne ci après quelques exemples de programmation fortran. Sur la plupart des machines, le nom du programme doit se terminer par ".f90" ou ".f".

```

program test
!déclaration de variables
implicit none
integer :: n, m, i, j, k, nx, ny
double precision , dimension (:), allocatable :: a !matrice du systeme
integer, dimension (:), allocatable :: ni !n(i)=nb termes de ligne i
integer, dimension (:), allocatable :: mi !cumul de ni
double precision, dimension (:), allocatable :: sat, satold !saturation
double precision, dimension (:), allocatable :: b, press !pression
double precision :: hx, hy, nxx, nyy

```

```

!quelques calculs
nx=2
ny=2
n=nx*ny
nxx=nx
nyy=ny
hx=1./nxx
hy=1./nyy
sat=0
! n(i)=nb termes de ligne i=i-p(i)+1
!dimension des tableaux
allocate (ni(n))
allocate (mi(n))
allocate (b(n))
allocate (press(n))
allocate (sat(n))
allocate (satold(n))
!calcul dimension de a
m=712
allocate (a(m))
!factorisation de a
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
call factchol(n,ni,m,a)
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!resolution de la pression
call desrem(n,ni,m,a,b)
!deux boucles emboitees
do i=1,nx
do j=1,ny-1
k=1
end do
end do
!resultats dans un fichier
open (unit=1, file='resultp', status='unknown')
do i=1,nx
write (1,*) sat(i)
end do
!insertion des sous programmes a la fin du programme principal
contains
subroutine factchol (n,ni,m,a)
integer :: n, m
double precision, dimension (m) :: a
integer, dimension (n) :: ni
integer, dimension (n) :: mi
end subroutine
subroutine desrem(n,ni,m,a,b)
integer :: n, m
double precision, dimension (m) :: a
double precision, dimension (n) :: b
integer, dimension (n) :: ni
integer, dimension (n) :: mi

```



```
end subroutine
end
```

Pour la présentation graphique des résultats, il est possible d'utiliser matlab. Dans l'exemple suivant, le programme (qui s'appelle "graph.m") lit un fichier, appelé "results", contenant 55 valeurs de la saturation en différents points du domaine et présente graphiquement ces valeurs.

```
sat=dlmread('results');
for i=1:55
sat(i)
end
N=55;
h=1/N;
x=[h/2];xx=h/2;
for i=2:N
xx=xx+h;
x=[x xx];
end
plot(x,sat,'rx');
title('sat. en diag');
```

## 6 Résultats numériques

**Hypothèses générales :** Ecoulement diphasique (eau et huile), immiscible, incompressible dans un milieu isotrope (mais éventuellement non homogène). Les phénomènes de capillarité ne sont pas pris en compte. La modélisation est faite en écrivant deux lois de conservations (pour chacune des phases) et une loi de Darcy généralisée. Les inconnues sont : "pression" (notée  $p$ ) et "saturation" (de la phase "eau", notée  $s$ ).

Domaine de simulation :  $]0, 1[ \times ]0, 1[$  pour les 4 premiers tests.

Maillages cartésiens, discrétisation par volumes finis, décentrement amont des perméabilités relatives.

Je donne simplement ici quelques résultats de simulation.

### Test 1.

Perméabilité absolue : Id

Perméabilités relatives :  $s$  (eau) et  $(1 - s)$  (huile)

Viscosités : 1 (eau) et 1 (huile)

Condition initiale :  $s = 0$

Conditions aux limites : flux nul en  $y = 0$  et  $y = 1$ , débit d'eau entrant constant et égal à 1 en  $x = 0$ , pression égale à 0 en  $x = 1$

Avec ces conditions, le champ de pression est indépendant du temps.

Nombre de mailles en  $x$  : 50

Nombre de mailles en  $y$  : 50

Figures 1 et 2: Résultats obtenus au temps  $T = 0.45$  avec  $CFL = 3/4$ .

### Test 2.

Perméabilité absolue : Id

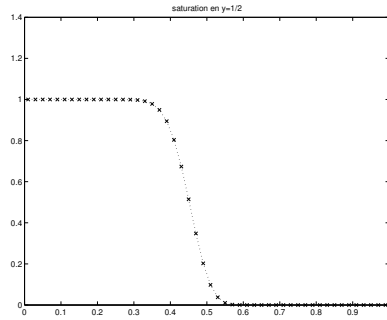


Figure 1: **Test 1. Saturation en  $y=1/2$**

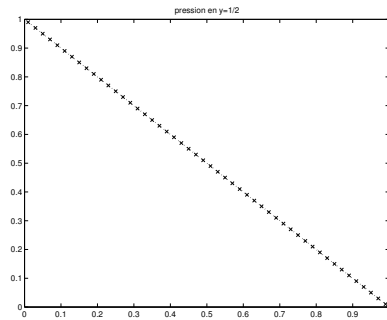


Figure 2: **Test 1. Pression en  $y=1/2$**

Perméabilités relatives :  $s^2$  (eau) et  $(1 - s)^2$  (huile)

Viscosités : 1 (eau) et 4 (huile)

Condition initiale :  $s = 0$

Conditions aux limites : flux nul en  $y = 0$  et  $y = 1$ , débit d'eau rentrant constant et égal à 1 en  $x = 0$ , pression égale à 0 en  $x = 1$

Pour ce test, le champ de pression dépend du temps.

Nombre de mailles en  $x$  : 50

Nombre de mailles en  $y$  : 50

Figures 3 et 4: Résultats obtenus au temps  $T = 0.429$  avec  $CFL = 1$ .

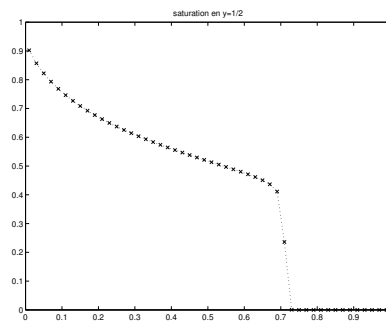


Figure 3: **Test 2. Saturation en  $y=1/2$**

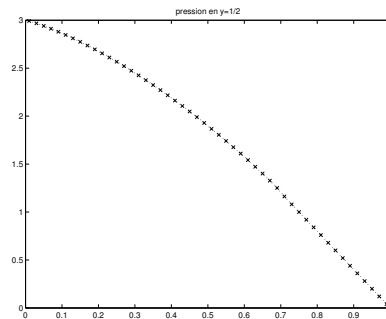


Figure 4: **Test 2. pression en  $y=1/2$**

### Test 3.

Perméabilité absolue : Id

Perméabilités relatives :  $s^2$  (eau) et  $(1 - s)^2$  (huile)

Viscosités : 1 (eau) et 4 (huile)

Condition initiale :  $s = 0$

Conditions aux limites :

1. Par la réunion des bords bas et gauche de la maille en bas à gauche (maille (1,1)) on impose un flux d'eau entrant égal à 1.
2. Sur les bords haut et droit de la maille en haut à droite (maille (nx,ny)) on impose une pression nulle.
3. En dehors des bords décrits ci dessus, on impose un flux nul.

Pour ce test, le champ de pression dépend du temps.

Nombre de mailles en  $x$  : 20, Nombre de mailles en  $y$  : 20. Figures 5 et 6: Résultats obtenus au temps  $T = 0.107$  avec  $CFL = 1$  qui donne 100 pas de temps) sur la diagonale du carré, du point (0,0) au point (1,1).

Nombre de mailles en  $x$  : 40, Nombre de mailles en  $y$  : 40. Figures 7 et 8: Résultats obtenus au temps  $T = 0.107$  avec  $CFL = 1$  (ce qui donne 400 pas de temps) sur la diagonale du carré, du point (0,0) au point (1,1).

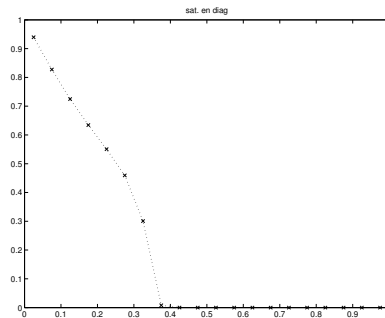


Figure 5: **Test 3. Saturation en diagonale**

#### Test 4.

Perméabilité absolue : Id

Perméabilités relatives :  $s^2$  (eau) et  $(1 - s)^2$  (huile)

Viscosités : 1 (eau) et 4 (huile)

Condition initiale :  $s = 0$

Conditions aux limites : Flux nul sur tout le bord sauf sur la moitié inférieure du bord droit. Sur cette moitié inférieure du bord droit, la condition aux limites est "pression nulle imposée" avec  $s = 1$  à l'extérieur du domaine (il ne peut donc rentrer que de l'eau).

Dans la maille "bas-gauche" se trouve un puits injecteur. Le rayon du puits est 0.001 et la pression est égale à 1.

Dans la maille "haut-droit" se trouve un puits producteur. Le rayon du puits est 0.001 et la pression est égale à -1.

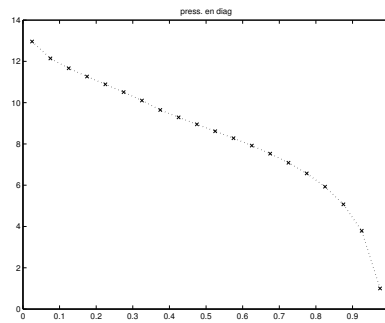


Figure 6: **Test 3.** pression en diagonale

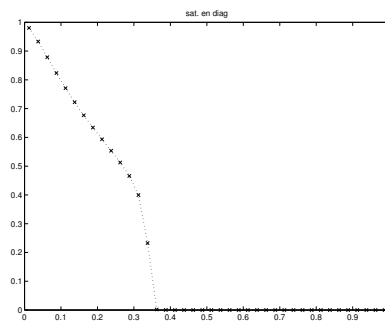


Figure 7: **Test 3.** Saturation en diagonale

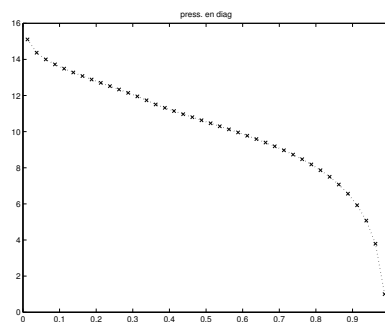


Figure 8: **Test 3.** pression en diagonale

Pour ce test, on peut remarquer que la formule de l'indice de puits est un peu discutable... et j'ai mis cet indice de puits sans tenir de la mobilité... (il est donc légèrement faux).

Nombre de mailles en  $x$  : 20, Nombre de mailles en  $y$  : 20. Figures 9 et 10: Résultats obtenus au temps  $T = 1.213$ , avec un calcul un peu simplifié du pas de temps (voir l'explication ci après) qui donne ici 100 pas de temps, sur la diagonale du carré, du point  $(0,0)$  au point  $(1,1)$ .

Nombre de mailles en  $x$  : 40, Nombre de mailles en  $y$  : 40. Figures 11 et 12: Résultats obtenus au temps  $T = 1.348$ , sur la diagonale du carré, du point  $(0,0)$  au point  $(1,1)$ , avec un calcul simplifié du pas de temps. Le pas de temps ne vérifie pas la contrainte demandée aux puits (il est, en gros, deux fois trop grand). Mais, comme il n'y a que 2 mailles ne vérifiant pas cette contrainte, la solution est satisfaisante (bonne "hauteur du front", bonne vitesse de propagation de cette discontinuité de la saturation) et le front est plus raide que celui qui serait obtenu avec le pas de temps respectant la contrainte de stabilité décrite dans le cours. Il y a ici 400 pas de temps (avec la contrainte de stabilité du cours, à  $CFL = 1$ , on aurait donc environ 800 pas de temps).

Nombre de mailles en  $x$  : 40, Nombre de mailles en  $y$  : 40. Figures 13 et 14: Résultats obtenus au temps  $T = 1.342$ , avec un calcul un peu plus rigoureux du pas de temps qui donne ici 570 pas de temps, sur la diagonale du carré, du point  $(0,0)$  au point  $(1,1)$ . Le pas de temps est ici piloté par la contrainte donnée par le puits producteur, à  $CFL = 1$ . La contrainte de stabilité est satisfaite dans toutes les mailles (c'est-à-dire que  $CFL \leq 1$ ) sauf pour la maille du puits injecteur. Pour cette maille, on a donc  $CFL > 1$ , mais la contrainte de stabilité est toutefois satisfaite, même pour cette maille, si on oublie le terme dû à la non linéarité de  $f$  (ceci permet, en particulier, que la saturation prenne toujours ses valeurs entre 0 et 1). Comme expliqué ci dessus, cette solution permet d'obtenir une discontinuité plus raide de la saturation, avec la bonne hauteur du front et la bonne vitesse de propagation de cette discontinuité. Avec la contrainte de stabilité du cours, à  $CFL \leq 1$  pour toutes les mailles et  $CFL = 1$  pour la maille du puits injecteur, on aurait 792 pas de temps.

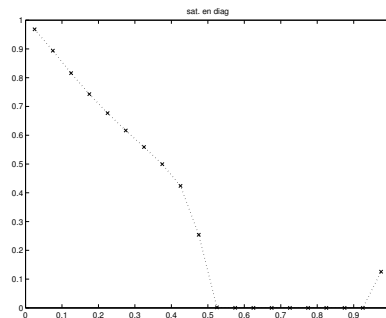


Figure 9: **Test 4. Saturation en diagonale**

### Test 5.

On simule ici un cas avec des données "réelles". Le domaine est un carré de 500 m sur 500 m, ce qui donne  $]0, 500[ \times ]0, 500[$ .

La porosité est partout de 0.2.

Perméabilité absolue : Les 100 m supérieurs sont occupés par du sable de perméabilité 100 mDarcy (1

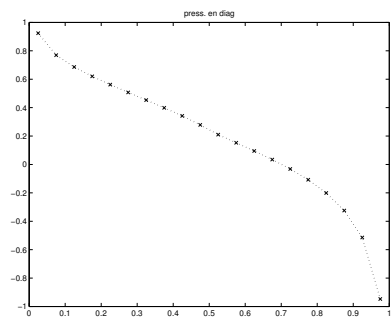


Figure 10: **Test 4. pression en diagonale**

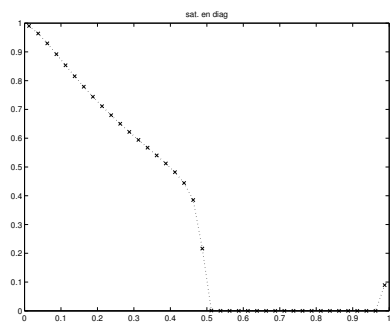


Figure 11: **Test 4. Saturation en diagonale**

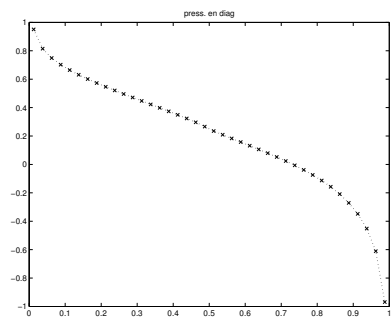


Figure 12: **Test 4. pression en diagonale**

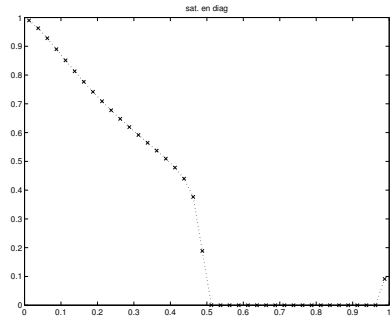


Figure 13: **Test 4. Saturation en diagonale**

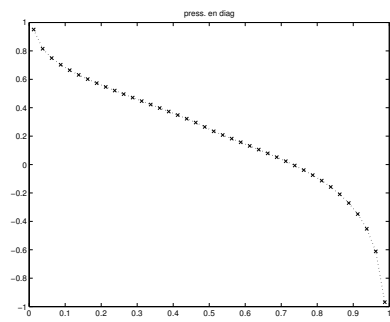


Figure 14: **Test 4. pression en diagonale**



$mdarcy$  est égal à  $10^{-15} m^2$ ). Les 400  $m$  inférieurs sont occupés par de l'argile de perméabilité  $10^{-2} m^2$ . Il s'agit donc d'exploiter un gisement très peu perméable.

Perméabilités relatives :  $s^2$  (eau) et  $(1 - s)^2$  (huile)

Viscosités : 1 centipoise pour l'eau et 5 centipoises pour l'huile (1 centipoise est égal à  $10^{-3} Pa.s$ ).

Condition initiale :  $s = 0$

Conditions aux limites : Flux nul sur les bords "haut", "gauche" et "droit". Sur le bord "bas", la pression est imposée à 200 bars (1 bar est égal à  $10^5 Pa$ ) avec  $s = 1$  à l'extérieur du domaine (il ne peut donc rentrer que de l'eau).

Au point (150m, 150m) se trouve un puits injecteur. Le rayon du puits est de 10 cm et la pression est égale à 350 bars. Avec cette valeur, le flux sur le bord inférieur est "sortant". Il est aussi intéressant de tester 250 bars. Avec cette valeur, le flux sur le bord inférieur est alors plutôt "entrant".

Au point (450m, 450m) se trouve un puits producteur. Le rayon du puits est 10 cm et la pression est égale à 150 bars.

Nombre de mailles en  $x$  : 55, Nombre de mailles en  $y$  : 55 (l'implantation des puits est alors très facile). Figures 15 et 16 : Résultats obtenus à un temps de l'ordre de 971000 jours, après 400 pas de temps. Le pas de temps est calculé de manière analogue à celle décrite pour le dernier cas du test 4. Le pas de temps est piloté par la contrainte donnée par le puits producteur, à  $CFL = 1$ . La contrainte de stabilité est satisfaite dans toutes les mailles (c'est-à-dire que  $CFL \leq 1$ ) sauf pour la maille du puits injecteur. Pour cette maille, on a  $CFL > 1$ , mais la contrainte de stabilité est toutefois satisfaite, même pour cette maille, si on oublie le terme dû à la non linéarité de  $f$  (ceci permet, en particulier, que la saturation prenne toujours ses valeurs entre 0 et 1). Comme expliqué ci dessus, cette solution permet d'obtenir une discontinuité plus raide de la saturation, avec la bonne hauteur du front et la bonne vitesse de propagation de cette discontinuité. Avec la contrainte de stabilité du cours, à  $CFL \leq 1$  pour toutes les mailles et  $CFL = 1$  pour la maille du puits injecteur, on aurait 644 pas de temps.

Les solutions (saturation et pression) sont données sur la diagonale du carré, du point (0,0) au point (500,500).

Changement de la perméabilité absolue : En prenant les 400  $m$  supérieurs occupés par du sable de perméabilité 100  $mdarcy$  et les 100  $m$  inférieurs occupés par de l'argile de perméabilité  $10^{-2} m^2$  (le gisement est alors très perméable) et en conservant 350 bars au puits injecteur, le temps final est alors de l'ordre de 257 jours, après 400 pas de temps. Le pas de temps est calculé comme précédemment. Les résultats de ce dernier test sont donnés dans les figures 17 et 18 :

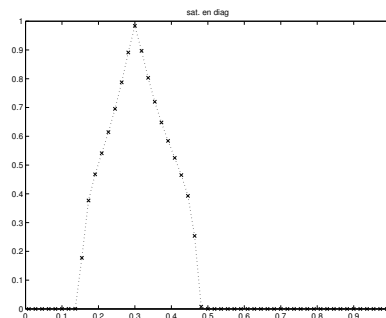


Figure 15: **Test 5-1. Saturation en diagonale**

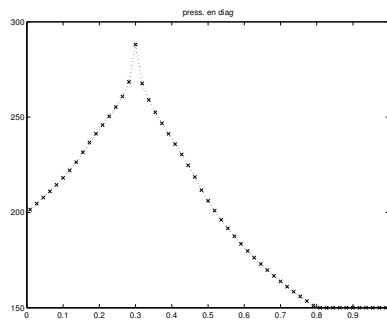


Figure 16: **Test 5-1. pression en diagonale**

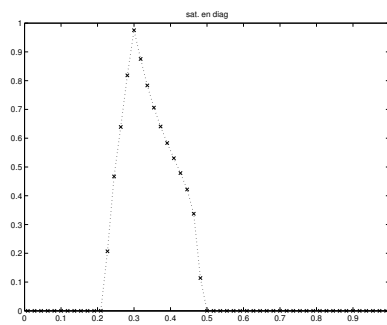


Figure 17: **Test 5-2. Saturation en diagonale**

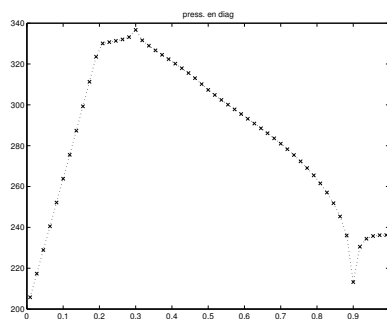


Figure 18: **Test 5-2. pression en diagonale**