Université de Marseille L1-S2- 2007-2008

Corrigé du devoir d'analyse de mars 2008

Exercice 1
Uniforme continuité

1. Montrer que la fonction définie par $f(x) = 1/x$ n'est pas uniformément continue sur $]0,1]$.
2. Soit $-\infty < a < b < +\infty$, montrer que la fonction $f(x) = x^2$ est uniformément continue sur $[a,b]$.
3. Montrer que la fonction $f(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue sur $[0,+\infty[$.

Corrigé

1. On écrit la négation de l'uniforme continuité

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \text{ tq } \forall \alpha > 0,\ \exists x, y \in]0,1];\ |x-y| \leq \alpha \text{ et } \ |f(x) - f(y)| \ > \varepsilon_0.$$

On voit que le problème se pose au voisinage du point 0 car même si l'écart entre x et y est très petit, l'écart entre $f(x)$ et $f(y)$ peut être très grand. Plus précisément

$$\exists \varepsilon_0 = \frac{1}{2} \text{ tq } \forall \alpha > 0, \exists n \ \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \frac{1}{n} < \alpha \text{ et } x = \ \frac{1}{n}, y = \ \frac{1}{2n}$$
$$\text{vérifient: } |x-y| \leq \alpha \text{ et } |f(x) - f(y)| = n \ > \frac{1}{2}.$$

2. Ce sera une conséquence de l'exercice 3, mais on peut le démontrer directement. Soit $x, y \in [a,b]$. Un calcul direct conduit à :

$$\left|x^2 - y^2\right| = |x-y|\,|x+y| \leq (|x| + |y|)\,|x-y| \leq 2\max\{|a|\,, |b|\}\,|x-y|\,.$$

Ainsi

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha = \frac{\varepsilon}{2\max\{|a|\,, |b|\}} > 0, \ \ |x-y| \leq \alpha \text{ et } |f(x) - f(y)| \ < \varepsilon.$$

(La fonction est $f(x) = x^2$ est même Lipschitzienne sur $[a,b]$ et donc uniformément continue sur $[a,b]$).

3. Là le problème se pose à l'infini. On va raisonner comme dans le cas 1.

$$\exists \varepsilon_0 = 1 \text{ tq } \forall \alpha > 0, \exists n \ \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \frac{1}{n} < \alpha \text{ et } x = \ n \ , y = n + \ \frac{1}{2n}$$
$$\text{vérifient: } |x-y| \leq \alpha \text{ et } |f(x) - f(y)| = 1 + \frac{1}{4n^2} \ > 1.$$

Exercice 2

Prolongement par densité

Soient f et g deux fonctions définies et *continues* sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$(x \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(x) = g(x)) \Rightarrow f = g.$$

Corrigé

On va utiliser que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (voir démonstration plus loin) et que f et g sont continues sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ il existe une suite $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ telle que $x_n \to x$. Par continuité de f et g on a

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x) \text{ et } \lim_{n \to +\infty} g(x_n) = g(x).$$

Mais comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \mathbb{Q}$ et que f et g coïncident sur $\mathbb{Q}$, on a

$$f(x_n) = g(x_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Donc

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} g(x_n).$$

Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Par définition de la partie entière, $E[.]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$E[(n+1)x] \leq (n+1)x < E[(n+1)x] + 1.$$

Posons:

$$x_n = \frac{E[(n+1)x]}{n+1}.$$

On a $x_n \in \mathbb{Q}$ et

$$x_n \to_{n+\infty} x.$$

Exercice 3 Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Soit f une fonction continue de $[0, \alpha[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) < 0$ et $\lim_{\substack{x \to \alpha \\ x < \alpha}} f(x) = +\infty$.

Soit g une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $g(0) < 0$ et $g(\beta) > 0$.

Montrer qu'il existe $x \in]0, \min\{\alpha, \beta\}[$ tel que $f(x)(x - \beta) - g(x) = 0$. [*On pourra distinguer les cas $\beta < \alpha$, $\beta > \alpha$ et $\beta = \alpha$.*]

Corrigé

Voir corrigé du partiel de 2006-2007.

Exercice 4

Soit $a < b \in \mathbb{R}$. *Toute fonction continue sur un $[a, b]$ est uniformément continue.*

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

On va raisonner par l'absurde.

1)-Ecrire la négation de cette définition.

2)-Montrer que si f n'est pas uniformément continue sur $[a,b]$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $(x_n),(y_n) \subset [a,b]$ tels que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n+1}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$.

3)-Montrer qu'il existe ϕ strictement croissante de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $\alpha \in [a,b]$ tels que $x_{\phi(n)} \to \alpha$ et $y_{\phi(n)} \to \alpha$.

4)-En déduire que si f n'est pas uniformément continue sur $[a,b]$, il existe $\alpha \in [a,b]$ tel que f n'est pas continue en α.

Corrigé

1)-

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists (x_\delta, y_\delta) \in [a,b]^2 \text{ t.q } |x_\delta - y_\delta| < \delta \text{ et } |f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon_0.$$

2)-Il suffit de choisir pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\delta = \frac{1}{n+1}$.

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists (x_n, y_n) \in [a,b]^2 \text{ t.q } |x_n - y_n| < \frac{1}{n+1} \text{ et } \left|f(x_{n)-f(y_n)}\right| \geq \varepsilon_0.$$

3)-Comme $[a,b]$ est un intervalle fermé borné, par le théorème de Bolzano-Weierstrass,on peut extraire de (x_n) une suite convergente. Ainsi il existe $x \in [a,b]$ et $\phi \nearrow: N \to N$ tels que $x_{\phi(n)} \to x$. La suite $(y_{\phi(n)})$ est une suite extraite de la suit (y_n), elle est dans $[a,b]$ donc, toujours par le théorème de Bolzano-Weierstrass on peut en extraire une sous suite convergente. Ainsi il existe $y \in [a,b]$ et $\psi \nearrow: N \to N$ tels que $y_{\psi(n)} \to y$. La suite $(x_{\psi(n)})$ est extraite de la suite $(x_{\phi(n)})$ qui est **convergente vers** x, donc elle converge aussi vers x.On a donc $x_{\psi(n)} \to x$ et $y_{\psi(n)} \to y$. Mais on a aussi pour tout n $|x_n - y_n| < \frac{1}{n+1}$ et donc $\left|x_{\psi(n)} - y_{\psi(n)}\right| < \frac{1}{\psi(n)+1}$ et en passant à la limite sur n on obtient: $|x - y| = 0$, et donc $x = y$. On appelle α cette valeur commune.

4)-On a donc trouvé $\alpha \in [a,b]$ et deux suites de $[a,b]$ convergentes vers α et telles que $\left|f(x_{\psi(n)}) - f(y_{\psi(n)}))\right| \geq \varepsilon_0$. Si f était continue en α les suites images $(f(x_{\psi(n)})$ et $(f(y_{\psi(n)})$ seraient convergentes vers $f(\alpha)$ et on aurait

$$|f(\alpha) - f(\alpha)| \geq \varepsilon_0 > 0$$

ce qui est impossible.