Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 1ere année,
Analyse (2eme semestre)

T. Gallouët pour les chapitres 1-5 et 7. A. Benabdallah pour le chapitre 6

January 8, 2010

Table des matières

Chapitre 1

Limites

1.1 Définition et propriétés

Dans tout ce document, on utilisera indifférement le terme “fonction” et le terme “application”. Une application (ou une fonction) f de D dans E est la donnée pour tout $x \in D$ de son image par f, notée $f(x)$. (Le domaine de définition de f est donc ici l'ensemble D.) lorsque nous parlerons d'une fonction de $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$, le domaine de définition de f sera donc $\mathbb{R}$ tout entier.

Définition 1.1 (Limite finie en un point de $\mathbb{R}$) *Soit f une application de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $b, c \in \mathbb{R}$ t.q. $b < a < c$ et $D \supset]b, a[\cup]a, c[$. On dit que l est limite de f en a si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ t.q. :*

$$x \in D,\, x \neq a,\, |x - a| \leq \alpha \;\Rightarrow\; |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

Proposition 1.1 (Unicité de la limite) *Soit f une application de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $b, c \in \mathbb{R}$ t.q. $b < a < c$ et $D \supset]b, a[\cup]a, c[$. Soit $l, m \in \mathbb{R}$. On suppose que l est limite de f en a et que m est aussi limite de f en a. Alors, $l = m$.*

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$. Comme l est limite de f en a, il existe $\alpha > 0$ t.q.

$$x \in D,\, x \neq a,\, |x - a| \leq \alpha \;\Rightarrow\; |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

Comme m est limite de f en a, il existe $\beta > 0$ t.q.

$$x \in D,\, x \neq a,\, |x - a| \leq \beta \;\Rightarrow\; |f(x) - m| \leq \varepsilon.$$

On choisit maintenant $x = \min(a + \alpha, a + \beta, \frac{a+c}{2})$. On a alors $x \neq a$, $x \in D$ (car $a < x < c$), $|x - a| \leq \alpha$ et $|x - a| \leq \beta$. On a donc $|f(x) - l| \leq \varepsilon$ et $|f(x) - m| \leq \varepsilon$. On en déduit $|l - m| \leq 2\varepsilon$.

On a ainsi montré que $|l - m| \leq 2\varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$. On en déduit que $l = m$. En effet, si $l \neq m$ on a $|l - m| > 0$. On choisit alors $\varepsilon = \frac{|l-m|}{4}$ et on obtient

$$2\varepsilon = \frac{|l - m|}{2} \leq \varepsilon,$$

et donc $2 \leq 1$ (car $\varepsilon > 0$). Ce qui est absurde. On a donc bien, nécessairement, $l = m$. ∎

Notation : Si l est limite de f en a, on note $l = \lim_{x \to a} f(x)$.

Proposition 1.2 (Caractérisation séquentielle de la limite) *Soit f une application de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $b, c \in \mathbb{R}$ t.q. $b < a < c$ et $D \supset]b, a[\cup]a, c[$. Alors, l est la limite en a de f si et seulement si f transforme toute suite convergente vers a (et prenant ses valeurs dans $D \setminus \{a\}$) en suite convergente vers l, c'est-à-dire :*

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D \setminus \{a\}, \lim_{n\to+\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l.$$

Démonstration : On suppose tout d'abord que $l = \lim_{x\to a} f(x)$ et on va montrer que f transforme toute suite convergente vers a (et prenant ses valeurs dans $D \setminus \{a\}$) en suite convergente vers l.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D \setminus \{a\}$ t.q. $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$. On veut montrer que $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$, c'est-à-dire (par définition de la limite d'une suite) que pout tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q.

$$n \geq n_0 \Rightarrow |f(x_n) - l| \leq \varepsilon. \tag{1.1}$$

Soit donc $\varepsilon > 0$. On cherche à montrer l'existence de n_0 donnant (1.1). On commence par remarquer que, comme $l = \lim_{x\to a} f(x)$, il existe $\alpha > 0$ t.q.

$$x \in D, x \neq a, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon. \tag{1.2}$$

Puis, comme $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q.

$$n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| \leq \alpha.$$

On a donc pour $n \geq n_0$, $x_n \in D$, $x_n \neq a$ (car la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend ses valeurs dans $D \setminus \{a\}$) et $|x_n - a| \leq \alpha$. Ce qui donne, par (1.2), $|f(x_n) - l| \leq \varepsilon$. On a donc bien

$$n \geq n_0 \Rightarrow |f(x_n) - l| \leq \varepsilon.$$

On a donc bien montré que $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$. Ce qui termine la première partie de la démonstration (c'est-à-dire que $l = \lim_{x\to a} f(x)$ implique que f transforme toute suite convergente vers a (et prenant ses valeurs dans $D \setminus \{a\}$) en suite convergente vers l.)

On montre maintenant la réciproque. On suppose que f transforme toute suite convergente vers a (et prenant ses valeurs dans $D \setminus \{a\}$) en suite convergente vers l. On veut montrer que $l = \lim_{x\to a} f(x)$. Pour cela, on va raisonner par l'absurde. On suppose que l n'est pas la limite en a de f (la fonction f peut alors avoir une limite en a différente de l ou bien ne pas avoir de limite en a) et on va construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prenant ses valeurs dans $D \setminus \{a\}$, t.q. $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$ et l n'est pas limite de $f(x_n)$ quand $n \to +\infty$ (en contradiction avec l'hypothèse).

Comme l n'est pas la limite en a de f, il existe $\varepsilon > 0$ t.q. pour tout $\alpha > 0$ il existe x t.q.

$$x \in D, x \neq a, |x - a| \leq \alpha \text{ et } |f(x) - l| > \varepsilon. \tag{1.3}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En prenant $\alpha = \frac{1}{n+1}$ dans (1.3), on peut donc choisir un réel x_n t.q.

$$x_n \in D, x_n \neq a, |x_n - a| \leq \frac{1}{n+1} \text{ et } |f(x_n) - l| > \varepsilon. \tag{1.4}$$

On a ainsi construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D \setminus \{a\}$, $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$ (car $|x_n - a| \leq \frac{1}{n+1}$ pour tout n) et l n'est pas limite de $f(x_n)$ quand $n \to +\infty$ (car $|f(x_n) - l| > \varepsilon$ pour tout n). Ce qui est bien en contradiction avec l'hypothèse que f transforme toute suite convergente vers a (et prenant ses valeurs dans $D \setminus \{a\}$) en suite convergente vers l. Ce qui termine la démonstration de la proposition 1.2.

■

Définition 1.2 (Limite finie à droite (ou à gauche) en un point de $\mathbb{R}$) *Soit f une application de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$.*

1. *On suppose qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ t.q. $a < c$ et $D \supset]a, c[$. On dit que si l est limite à droite de f en a si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ t.q. :*

$$x \in D,\ a < x \le a + \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \le \varepsilon.$$

2. *On suppose qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ t.q. $b < a$ et $D \supset]b, a[$. On dit que l est limite à gauche de f en a si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ t.q. :*

$$x \in D,\ a - \alpha \le x < a \Rightarrow |f(x) - l| \le \varepsilon.$$

Proposition 1.3 (Unicité de la limite à droite (ou à gauche)) *Soit f une application de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.*

1. *On suppose qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ t.q. $a < c$ et $D \supset]a, c[$. Si f admet une limite (finie) à droite en a, cette limite est unique.*

2. *On suppose qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ t.q. $b < a$ et $D \supset]b, a[$. Si f admet une limite (finie) à gauche en a, cette limite est unique.*

DÉMONSTRATION : La démonstration de l'unicité de la limite à droite est très voisine de la démonstration de l'unicité de la limite faite pour la proposition 1.1. On reprend ici cette démonstration. On suppose que l est limite à droite de f en a et que m est aussi limite à droite de f en a. Soit $\varepsilon > 0$. Comme l est limite à droite de f en a, il existe $\alpha > 0$ t.q.

$$x \in D, a < x \le a + \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \le \varepsilon.$$

Comme m est limite à droite de f en a, il existe $\beta > 0$ t.q.

$$x \in D, a < x \le a + \beta \Rightarrow |f(x) - m| \le \varepsilon.$$

On choisit maintenant $x = \min(a + \alpha, a + \beta, \frac{a+c}{2})$. On a alors $x \in D$, $a < x \le a + \alpha$ et $a < x \le a + \beta$. On a donc $|f(x) - l| \le \varepsilon$ et $|f(x) - m| \le \varepsilon$. On en déduit $|l - m| \le 2\varepsilon$.

On a ainsi montré que $|l - m| \le 2\varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$. Comme dans la proposition 1.1, on en déduit que $l = m$. Ce qui donne l'unicité de la limite à droite de f en a.

La démonstration de l'unicité de la limite à gauche est semblable et est laissée en exercice. ∎

Notation : Si l est limite à droite de f en a, on note $l = \lim_{x\to a, x>a} f(x)$. Si l est limite à gauche de f en a, on note $l = \lim_{x\to a, x<a} f(x)$.

Proposition 1.4 (Limite=limite à droite et à gauche) *Soit f une application de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $b, c \in \mathbb{R}$ t.q. que $b < a < c$ et $D \supset]b, a[\cup]a, c[$. Alors, f admet l comme limite en a si et seulement si f admet l comme limite à droite et à gauche en a.*

DÉMONSTRATION : Cette démonstration (dans le cas $D = \mathbb{R} \setminus \{a\}$) est laissé en exercice (exercice 1.9). ∎

Proposition 1.5 (Caractérisation séquentielle de la limite à droite)
Soit f une application de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ t.q. $a < c$ et $D \supset]a, c[$. On a alors :

1. *l est la limite à droite en a de f si et seulement si f transforme toute suite convergente vers a, prenant ses valeurs dans $D \setminus \{a\}$ et "supérieure" à a, en suite convergente vers l, c'est-à-dire :*

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D,\ x_n > a \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},\ \lim_{n\to+\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l.$$

2. *l est la limite à droite en a de f si et seulement si f transforme toute suite convergente vers a, prenant ses valeurs dans $D \setminus \{a\}$ et décroissante, en suite convergente vers l, c'est-à-dire :*

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D,\ a < x_{n+1} \le x_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},\ \lim_{n\to+\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l.$$

Démonstration :
La démonstration du premier item est très voisine de celle faite pour la proposition 1.2. On reprend donc ici la démonstration de la proposition 1.2.

On suppose tout d'abord que $l = \lim_{x\to a, x>a} f(x)$ et on va montrer que f transforme toute suite convergente vers a, prenant ses valeurs dans $D \setminus \{a\}$ et "supérieure" à a, en suite convergente vers l.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ t.q. $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$ et $a < x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On veut montrer que $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$, c'est-à-dire (par définition de la limite d'une suite) que pout tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q.

$$n \ge n_0 \Rightarrow |f(x_n) - l| \le \varepsilon. \tag{1.5}$$

Soit donc $\varepsilon > 0$. On cherche à montrer l'existence de n_0 donnant (1.5). On commence par remarquer que, comme $l = \lim_{x\to a, x>a} f(x)$, il existe $\alpha > 0$ t.q.

$$x \in D, a < x \le a + \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \le \varepsilon. \tag{1.6}$$

Puis, comme $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$ (et que $x_n > a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q.

$$n \ge n_0 \Rightarrow a < x_n \le a + \alpha.$$

On a donc pour $n \ge n_0$, $x_n \in D$ (car la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend ses valeurs dans D) et $a < x_n \le a + \alpha$. Ce qui donne, par (1.6), $|f(x_n) - l| \le \varepsilon$. On a donc bien

$$n \ge n_0 \Rightarrow |f(x_n) - l| \le \varepsilon.$$

On a donc bien montré que $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$. Ce qui termine la première partie de la démonstration (c'est-à-dire que $l = \lim_{x\to a} f(x)$ implique que f transforme toute suite convergente vers a, prenant ses valeurs dans $D \setminus \{a\}$ et "supérieure" à a, en suite convergente vers l.)

On montre maintenant la réciproque. On suppose que f transforme toute suite convergente vers a, prenant ses valeurs dans $D \setminus \{a\}$ et "supérieure" à a, en suite convergente vers l. On veut montrer que $l = \lim_{x\to a, x>a} f(x)$. Pour cela, on va raisonner par l'absurde. On suppose que l n'est pas la limite à droite en a de f (la fonction f peut alors avoir une limite à droite en a différente de l ou bien ne pas avoir de limite à droite en a) et on va construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prenant ses valeurs dans $D \setminus \{a\}$, "supérieure" à a, t.q. $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$ et t.q. l n'est pas limite de $f(x_n)$ quand $n \to +\infty$ (en contradiction avec l'hypothèse).

Comme l n'est pas la limite à droite en a de f, il existe $\varepsilon > 0$ t.q. pour tout $\alpha > 0$ il existe x t.q.

$$x \in D,\, a < x \leq a + \alpha \text{ et } |f(x) - l| > \varepsilon. \tag{1.7}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En prenant dans (1.7) $\alpha = \frac{1}{n+1}$, on peut donc choisir x_n t.q.

$$x_n \in D,\, a < x_n \leq a + \frac{1}{n+1} \text{ et } |f(x_n) - l| > \varepsilon.$$

on obtient ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D \setminus \{a\}$, "supérieure" à a, tendant vers a, quand $n \to +\infty$, et dont l'image par f ne tend vers l. Ce qui est bien en contradiction avec l'hypothèse que f transforme toute suite convergente vers a, prenant ses valeurs dans $D \setminus \{a\}$ et "supérieure" à a, en suite convergente vers l. Ce qui termine la démonstration du premier item de la proposition 1.5.

On montre maintenant le deuxième item. La première partie est immédiate. Si $l = \lim_{x\to a, x>a}$, la fonction f transforme toute suite convergente vers a, prenant ses valeurs dans $D \setminus \{a\}$ et décroissante, en suite convergente vers l (car une telle suite est nécessairement "supérieure" à a). Pour montrer la réciproque, on raisonne une nouvelle fois par l'absurde. On suppose que l n'est pas la limite à droite en a de f. La démonstration du premier item a permis de montrer qu'il existait $\varepsilon > 0$ et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$a < x_n,\, x_n \in D,\, |f(x_n) - l| > \varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} x_n = a.$$

Il suffit de modifier légerement cette suite pour la rendre décroissante. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $y_n = \min(x_0, \ldots, x_n)$. La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie alors (en remarquant que y_n est l'un des x_p pour $p \leq n$ et que $a < y_n \leq x_n$)

$$a < y_{n+1} \leq y_n,\, y_n \in D,\, |f(y_n) - l| > \varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} y_n = a.$$

la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend donc ses valeurs dans $D\setminus\{a\}$, est décroissante, converge vers a et la suite $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers l. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse. La démonstration de la proposition 1.5 est terminée. ■

Bien sûr, une caractérisation analogue est possible pour la limite à gauche. Dans le premier item, on remplace "supérieure" par "inférieure" et dans le deuxième item, on remplace "décroissante" par "croissante", voir l'exercice 1.9.

Exemple 1.1 On prend ici $D =]0, \infty[$ et on cherche la limite à droite de f en 0 dans les deux exemples suivants :

1. Pour $x \in D$, $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$. Pour cet exemple, f n'admet pas de limite à droite en 0.
2. Pour $x \in D$, $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$. Pour cet exemple, $\lim_{x\to 0, x>0} f(x) = 0$.

Définition 1.3 (Limite infinie en 1 point, limites en $\pm\infty$)
Soit f une application de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. *Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $b, c \in \mathbb{R}$ t.q. $D \supset]b, a[\cup]a, c[$ et $b < a < c$. On dit que $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ si pour tout $A \in \mathbb{R}$ il existe $\alpha > 0$ t.q. :*

$$x \in D,\, x \neq a,\, |x - a| \leq \alpha \;\Rightarrow\; f(x) \geq A.$$

2. *Soit $l \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ t.q. $D \supset]b, +\infty[$. On dit que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M > 0$ t.q. :*
$$x \in D,\, x \geq M \;\Rightarrow\; |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$
3. *On suppose qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ t.q. $D \supset]b, +\infty[$. On dit que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si pour tout $A \in \mathbb{R}$ il existe $M > 0$ t.q. :*
$$x \in D,\, x \geq M \;\Rightarrow\; f(x) \geq A.$$

Bien sûr, des définitions analogues existent avec $-\infty$ au lieu de $+\infty$ et, dans le cas du premier item, il est aussi possible de définir des limites infinies à droite et à gauche. Il est suggéré d'écrire de telles définitions.

Exemple 1.2 On prend ici $D =]0, \infty[$ $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ pour $x \in D$. On a alors ;

1. $\lim_{x\to 0, x>0} f(x) = +\infty$,
2. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

1.2 Opérations sur les limites

Proposition 1.6 (Limite d'une somme, d'un produit et d'un quotient)
Soit f, g deux applications de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a, b, c \in \mathbb{R}$ t.q. $b < a < c$ et $D \supset]b, a[\cup]a, c[$. Soit $l, m \in \mathbb{R}$ t.q. $\lim_{x\to a} f(x) = l$ et $\lim_{x\to a} g(x) = m$. Alors :

1. *$\lim_{x\to a}(f + g)(x) = l + m$,*
2. *$\lim_{x\to a} fg(x) = lm$,*
3. *Si $m \neq 0$, il existe $\beta > 0$ t.q. $]a - \beta, a[\cup]a, a + \beta[\subset D$ et $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a - \beta, a[\cup]a, a + \beta[$ (de sorte que f/g est bien définie sur $]a - \beta, a[\cup]a, a + \beta[$) et on a :*
$$\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{l}{m}.$$

Démonstration : Les items 1 et 3 sont laissés en exercice (exercice 1.10). On montre ici le deuxième item.
On veut montrer que $\lim_{x\to a} fg(x) = lm$, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ t.q.
$$x \in D,\, x \neq a,\, |x - a| \leq \alpha \;\Rightarrow\; |fg(x) - lm| \leq \varepsilon. \tag{1.8}$$
Soit $\varepsilon > 0$. On cherche donc $\alpha > 0$ vérifiant (1.8). Pour $x \in D$, on rappelle que $fg(x) = f(x)g(x)$. On commence par remarquer que $fg(x) - lm = fg(x) - lg(x) + lg(x) - lm$, de sorte que
$$|fg(x) - lm| \leq |f(x) - l||g(x)| + |l||g(x) - m|. \tag{1.9}$$
Comme $\lim_{x\to a} g(x) = m$, il existe $\alpha_1 > 0$ t.q.
$$x \in D,\, x \neq a,\, |x - a| \leq \alpha_1 \;\Rightarrow\; |g(x) - m| \leq \frac{\varepsilon}{2(|l| + 1)},$$

de sorte que

$$x \in D,\, x \neq a,\, |x-a| \leq \alpha_1 \Rightarrow |l||g(x)-m| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.10}$$

Il existe aussi $a_2 > 0$ t.q.

$$x \in D,\, x \neq a,\, |x-a| \leq \alpha_2 \Rightarrow |g(x)-m| \leq 1 \Rightarrow |g(x)| \leq |m|+1,$$

de sorte que

$$x \in D,\, x \neq a,\, |x-a| \leq \alpha_2 \Rightarrow |f(x)-l||g(x)| \leq |f(x)-l|(|m|+1). \tag{1.11}$$

Enfin, comme $\lim_{x\to a} f(x) = l$, il existe $\alpha_3 > 0$ t.q.

$$x \in D,\, x \neq a,\, |x-a| \leq \alpha_3 \Rightarrow |f(x)-l| \leq \frac{\varepsilon}{2(|m|+1)}. \tag{1.12}$$

On pose maintenant $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) > 0$ et on obtient, grâce aux inégalités (1.9)-(1.12),

$$x \in D,\, x \neq a,\, |x-a| \leq \alpha \Rightarrow |fg(x) - lm| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ce qui est (1.8) et conclut la démonstration. ■

Des résultats analogues à ceux donnés dans la proposition 1.6 sont possibles si $l = \pm\infty$ et (ou) si $m = \pm\infty$.

Proposition 1.7 (passage à limite dans une inégalité) *Soit f, g deux applications de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a, b, c \in \mathbb{R}$ t.q. $D \supset]b, a[\cup]a, c[$ avec $b < a < c$. Soit $l, m \in \mathbb{R}$ t.q. $\lim_{x\to a} f(x) = l$ et $\lim_{x\to a} g(x) = m$. On suppose que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in D$. On a alors $l \leq m$.*

Démonstration : On commence par montrer que $l - m \leq 2\varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{x\to a} f(x) = l$, il existe $\alpha_1 > 0$ t.q.

$$x \in D,\, x \neq a,\, |x-a| \leq \alpha_1 \Rightarrow |f(x)-l| \leq \varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon.$$

Comme $\lim_{x\to a} g(x) = m$, il existe $\alpha_2 > 0$ t.q.

$$x \in D,\, x \neq a,\, |x-a| \leq \alpha_2 \Rightarrow |g(x)-m| \leq \varepsilon \Rightarrow m - \varepsilon \leq g(x) \leq m + \varepsilon.$$

On choisit maintenant $x = a + \alpha$ avec $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2, \frac{a+c}{2})$ (de sorte que $\alpha \leq \alpha_1$, $\alpha \leq \alpha_2$, $x \neq a$ et $x \in D$). On a alors

$$l - \varepsilon \leq f(x) = g(x) \leq m + \varepsilon.$$

On a donc bien montré que $l - m \leq 2\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.
On en déduit que $l - m \leq 0$. En effet, si $l - m > 0$, on pose $\varepsilon = \frac{l-m}{4}$ et on obient $4\varepsilon = l - m \leq 2\varepsilon$, ce qui est absurde car $\varepsilon > 0$.
Finalement, on a bien montré que $l \leq m$. ■

On donne maintenant un résultat (malheureusement un peu compliqué à énoncer) sur la composition de limites.

Proposition 1.8 (Composition de limites) *Soit f, g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a, b, c \in \mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim_{x\to b} g(x) = c$. On suppose aussi que $f(x) \neq b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors, $\lim_{x\to a} g \circ f(x) = c$*

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $\alpha > 0$ t.q.

$$x \neq a,\ |x-a| \leq \alpha \Rightarrow |g(f(x)) - c| \leq \varepsilon.$$

On commence par utiliser le fait que $\lim_{y\to b} g(y) = c$. Ceci donne l'existence de $\eta > 0$ t.q.

$$y \neq b,\ |y-b| \leq \eta \Rightarrow |g(y) - c| \leq \varepsilon. \tag{1.13}$$

Puis, comme $\lim_{x\to a} f(x) = b$, il existe $\alpha > 0$ t.q.

$$x \neq a,\ |x-a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - b| \leq \eta.$$

Comme $f(x) \neq b$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$), on a donc avec (1.13)

$$x \neq a,\ |x-a| \leq \alpha \Rightarrow |g(f(x)) - c| \leq \varepsilon.$$

On a bien montré que $\lim_{x\to a} g \circ f(x) = c$. ∎

Remarque 1.1 Dans la proposition 1.8, nous avons pris (pour simplifier l'énoncé) des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Mais, cette proposition reste vraie si f est définie que $D \subset \mathbb{R}$ et g définie sur $E \subset \mathbb{R}$ en supposant qu'il existe $\gamma > 0$ t.q. $D \supset]a-\gamma, a[\cup]a, a+\gamma[$ et $E \supset]b-\gamma, b[\cup]b, +\gamma[$. Il faut alors commençer par remarquer que $g \circ f$ est définie sur ensemble qui contient $]a-\delta, a[\cup]a, a+\delta[$ pour un certain $\delta > 0$.

1.3 Fonctions monotones

Définition 1.4 (fonctions croissantes)
Soit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et f une application de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$.

1. *On dit que f est croissante (ou monotone croissante) si :*

$$x, y \in]a, b[,\ x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

2. *On dit que f est strictement croissante (ou strictement monotone croissante) si :*

$$x, y \in]a, b[,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

De manière analogue, on définit les fonctions décroissantes.

Proposition 1.9 (Limites d'une fonction monotone) *Soit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et f une application croissante de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$. On a alors :*

1. *L'application f admet en tout point $c \in]a, b[$ une limite à droite et une limite à gauche, encadrant $f(c)$ (c'est-à-dire $\lim_{x\to c, x<c} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x\to c, x>c} f(x)$).*
2. *L'application f admet une limite (à gauche) finie ou égale à $+\infty$ en b, et l'application f admet une limite (à droite) finie ou égale à $-\infty$ en a.*

Démonstration : Soit $c \in]a,b[$. On va montrer que f admet une limite à gauche en c et que cette limite est inférieure ou égale à $f(c)$.

On pose $A = \{f(x),\ x < c\}$. L'ensemble A est une partie non vide de $\mathbb{R}$, majorée par $f(c)$ (car f est croissante), il admet donc une borne supérieure, que l'on note l. On a $l \le f(c)$ (car $f(c)$ est un majorant de A). On montre maintenant que $l = \lim_{x\to c, x<c} f(x)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $l - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A (puisque l est le plus petit des majorants de A), il existe $b \in A$ t.q. $b > l - \varepsilon$. Il existe donc $x_0 < c$ t.q. $f(x_0) = b > l - \varepsilon$. On pose $\alpha = c - x_0$. On a donc $\alpha > 0$ et, grâce à la croissance de f,

$$x_0 \le x \Rightarrow f(x_0) \le f(x),$$

et donc, comme $x_0 = c - \alpha$ et $f(x_0) = b > l - \varepsilon$,

$$c - \alpha \le x \Rightarrow l - \varepsilon < f(x).$$

Par définition de l on a aussi

$$x < c \Rightarrow f(x) \le l.$$

On a donc, finalement,

$$c - \alpha \le x < c \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) \le l.$$

Ceci prouve que $l = \lim_{x\to c, x<c} f(x)$. On a donc bien montré que f admet une limite à gauche en c et que cette limite est inférieure ou égale à $f(c)$.

Un raisonnement semblable (non fait ici) permet de montrer que f admet une limite à droite en c et que cette limite est supérieure ou égale à $f(c)$.

Pour montrer que f admet une limite à gauche, finie ou égale à $+\infty$, en b, on pose $\mathrm{Im}(f) = \{f(x),\ x \in]a,b[\}$.

Si $\mathrm{Im}(f)$ est majorée, on note β la borne supérieure de $\mathrm{Im}(f)$. La croissance de f permet alors de montrer que $\beta = \lim_{x\to b, x<b} f(x)$. Cette démonstration est laissée ici en exercice.

Si $\mathrm{Im}(f)$ n'est pas majorée, la croissance de f permet de montrer que $\lim_{x\to b, x<b} f(x) = +\infty$. Cette démonstration est aussi laissée ici en exercice.

Bien sûr, les démonstrations pour trouver la limite à droite en a sont très voisines. ■

Remarque 1.2 Soit $-\infty \le a < b \le +\infty$ et f une application croissante de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$. On pose $\alpha = \lim_{x\to a, x>a} f(x)$ et $\beta = \lim_{x\to b, x<b} f(x)$ (on rappelle que $\alpha \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ et $\beta \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$). Si f n'a pas de saut (c'est-à-dire $\lim_{x\to c, x<c} f(x) = \lim_{x\to c, x>c} f(x)$ pour tout $c \in]a,b[$), l'application f est alors une bijection de $]a,b[$ dans $]\alpha,\beta[$. Nous démontrerons cette propriété au chapitre 2, section 2.4.

1.4 Exercices

1.4.1 Quelques rappels (Parties majorées et minorées, Suites...)

Exercice 1.1

Soit a, $b \in \mathbb{R}$. Montrer les implications suivantes :

1. $(\forall \varepsilon > 0,\ |a| < \varepsilon) \Rightarrow a = 0$.

2. $(\forall \varepsilon > 0,\, a < b + \varepsilon) \Rightarrow a \leq b$.

3. $(\forall \varepsilon > 0,\, |a - b| < \varepsilon) \Rightarrow a = b$.

Pour les exercices suivants, on rappelle que si A est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, il existe un nombre réel, noté $\sup(A)$, qui est le plus petit des majorants de A. De même, si A est une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$, il existe un nombre réel, noté $\inf(A)$, qui est le plus grand des minorants de A.

Exercice 1.2
Soit A est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. On pose $-A = \{-a,\, a \in A\}$. Montrer que $-A$ est une partie non vide minorée $\mathbb{R}$. Comparer $\inf(-A)$ et $\sup(A)$.

Exercice 1.3
Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ t.q. $A \subset B$. On suppose que B est majorée. Montrer que A est majorée et que $\sup(A) \leq \sup(B)$. Cette dernière inégalité est-elle nécessairement stricte si l'inclusion de A dans B est stricte ?

Exercice 1.4
Soit A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$. On pose $A + B = \{a + b,\, a \in A \text{ et } b \in B\}$. Montrer que $A + B$ est majorée et comparer $\sup(A + B)$ et $\sup(A) + \sup(B)$.

Exercice 1.5

1. Montrer que toute suite convergente dans $\mathbb{R}$ est bornée (c'est-à-dire majorée et minorée).
2. Montrer que toute suite croissante majorée est convergente dans $\mathbb{R}$.

Exercice 1.6
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. On suppose que A est majorée et on pose $a = \sup(A)$. Montrer qu'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a.
2. On suppose que A n'est pas majorée. Montrer qu'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers l'infini.

Exercice 1.7 (Moyennes harmonique et arithmétique)

1. Montrer que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $0 < a < b$, on a :
$$a < \frac{2ab}{a+b} < \frac{a+b}{2} < b.$$
2. Soit $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ t.q. $0 < u_0 < v_0$. On définit, par récurrence, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$$u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n},\ \ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$
   (a) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies (c'est-à-dire que $u_n + v_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) et que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes (dans $\mathbb{R}$).
   (b) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n$.
   (c) Vérifier que la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
   (d) Donner la limite commune au suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.4.2 Limites

Exercice 1.8

Soit $l \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ecrire à l'aide des quantificateurs les phrases suivantes :

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers l quand n tend vers $+\infty$.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
3. $f(x)$ ne tend pas vers l quand x tend vers a.
4. $f(x)$ ne tend pas vers l quand x tend vers $+\infty$.

.

Exercice 1.9 (Limite, limite à droite et limite à gauche)

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$. Soit f une application définie sur $A = \mathbb{R} \setminus \{a\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f admet l comme limite en a si et seulement si f admet (en a) l comme limite à droite et comme limite à gauche.
2. Montrer que f admet l comme limite à gauche en a si et seulement si f vérifie la condition suivante :
   Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A,
   $$x_n \uparrow a, \text{ quand } n \to +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l,$$
   où "$x_n \uparrow a$ quand $n \to +\infty$" signifie "$a = \lim_{n\to+\infty} x_n$ et $x_{n+1} \geq x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$".
3. Reprendre les questions 1 et 2 avec $l = \infty$ et avec $l = -\infty$.

Exercice 1.10 (Opérations sur les limites)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $I =]a, b[$. Soit f et g deux applications de I dans $\mathbb{R}$ et $l, m \in \mathbb{R}$. On suppose que $l = \lim_{x\to a,\, x>a} f(x)$ et $m = \lim_{x\to a,\, x>a} g(x)$.

1. Montrer que $l + m = \lim_{x\to a,\, x>a}(f + g)(x)$.
2. On suppose que $m \neq 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ t.q. $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in J =]a, c[$. Montrer que $\frac{l}{m} = \lim_{x\to a,\, x>a} \frac{f(x)}{g(x)}$.
3. On suppose que $m = 0$, $l > 0$ et que $g(x) > 0$ pour tout $x \in I$. Montrer que $\lim_{x\to a,\, x>a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.
4. On prend ici $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ et $g(x) = x$. Les applications fg et f/g (qui est bien définie sur I) ont-elles une limite à droite en 0 ?

Exercice 1.11 (Quelques exemples. . .)

Pour les exemples suivants, la fonction f est définie sur $I = \mathbb{R}$.

1. On définit f par $f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. L'application f a-t-elle une limite en 0 ? une limite à droite en 0 ? une limite à gauche en 0 ?

2. On définit f par $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - (x + 1)$ pour tout x. Quelle la limite de f en $+\infty$?
3. On définit f par $f(x) = \frac{\sin(\sqrt{x^2})}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. L'application f a-t-elle une limite en 0 ? une limite à droite en 0 ? une limite à gauche en 0 ?
4. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $E(x) = \sup\{n \in \mathbb{Z};\ n \leq x\}$. On définit f par $f(x) = x - \sqrt{x - E(x)}$ pour tout $x \neq 0$. Soit $n \in \mathbb{Z}$, L'application f a-t-elle une limite en n ? une limite à droite en n ? une limite à gauche en n ?

Exercice 1.12 (Autres exemples. . .)

1. $f(x) = \frac{\sqrt{x^3-3x+2}}{2x^2-x-1}$ pour $x \in]0, 1[$. Quelle est la limite (à gauche) de f en 1 ?
2. $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+4}}$ pour $x \in]0, 1[$. Quelle est la limite (à droite) de f en 0 ?
3. Soit $a > 0$. On définit f par $f(x) = \frac{(1+x)^a}{x}$ pour $x \in]0, 1[$. Quelle est la limite (à droite) de f en 0 ?
4. $f(x) = (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$ pour $x \in]0, 1[$. Quelle est la limite (à droite) de f en 0 ?

Exercice 1.13 (Fonction périodique admettant une limite)

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. on suppose qu'il existe $T > 0$ t.q. $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (on dit alors que f est périodique de période T). On suppose de plus que f admet une limite finie, notée l, en $+\infty$. Montrer que f est une fonction constante.

Exercice 1.14 (Limite en $+\infty$)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$?

Exercice 1.15 (Point fixe d'une application croissante)

Soit $I = [0, 1]$ et f une application croissante de I dans I. On pose $A = \{x \in I, f(x) \leq x\}$. Montrer que :

1. $A \neq \emptyset$,
2. $x \in A \Rightarrow f(x) \in A$.
3. A possède une borne inférieure $a \in I$.
4. $f(a) = a$.

(Toute application croissante de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ admet donc un point fixe.)

Exercice 1.16 (Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$, construire $x_\varepsilon \in \mathbb{Q}$ tel que $|x - x_\varepsilon| \leq \varepsilon$.

Exercice 1.17 (Moyenne de Césaro)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_n = \frac{u_1+\ldots+u_n}{n}$.

1. Soit $l \in \mathbb{C}$. On suppose (dans cette question) que $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} v_n = l$.
2. On suppose miantenant que $u_n \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ implique $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

(b) On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Soit $l \in \overline{\mathbb{R}}_+$, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = l \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = l.$$

3. (Généralisation) Soit (λ_n) une suite de nombres réels strictement positifs. Soit $l \in \mathbb{C}$. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ et que

$$\lim_{n\to+\infty} (\sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k) = +\infty.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$w_n = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k u_k}{\sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k}.$$

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} w_n = l$.

4. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots + \sqrt[n]{n}}{n} = 1.$$

5. Soit $l \in \mathbb{C}$. On suppose que $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = l$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = l$.

1.5 Exercices corrigés

Exercice 1.18 (Corrigé de l'exercice 1.11)
Pour les exemples suivants, la fonction f est définie sur $I = \mathbb{R}$.

1. On définit f par $f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. L'application f a-t-elle une limite en 0 ? une limite à droite en 0 ? une limite à gauche en 0 ?

corrigé

Pour $x > 0$, on a $f(x) = x + 1$. On a donc $\lim_{x\to 0, x>0} f(x) = 1$. La fonction f a donc une limite à droite en 0.

Pour $x < 0$, on a $f(x) = x - 1$ (car $\sqrt{x^2} = -x$). On a donc $\lim_{x\to 0, x<0} f(x) = -1$. La fonction f a donc une limite à gauche en 0.

Comme $\lim_{x\to 0, x>0} f(x) \neq \lim_{x\to 0, x<0} f(x)$, la fonction f n'a pas de limite en 0.

---

2. On définit f par $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - (x + 1)$ pour tout x. Quelle la limite de f en $+\infty$?

corrigé

Pour $x > 0$, on a :

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2+x+1} - (x+1))(\sqrt{x^2+x+1} + (x+1))}{\sqrt{x^2+x+1} + (x+1)} = \frac{x^2+x+1-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+x+1}+(x+1)},$$

et donc

$$f(x) = \frac{-x}{\sqrt{x^2+x+1}+(x+1)} = -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + 1 + \frac{1}{x}}.$$

On en déduit que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$.

---

3. On définit f par $f(x) = \frac{\sin(\sqrt{x^2})}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. L'application f a-t-elle une limite en 0 ? une limite à droite en 0 ? une limite à gauche en 0 ?

corrigé

Pour $x > 0$, on a $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. La fonction sin est dérivable et sa dérivée est la fonction cos. La limite à droite en 0 de f est donc $\cos(0)$, c'est-à-dire $\lim_{x\to 0, x>0} f(x) = 1$. La fonction f a donc une limite à droite en 0.

Pour $x < 0$, on a $f(x) = \frac{\sin(-x)}{x} = -\frac{\sin(x)}{x}$. On a donc $\lim_{x\to 0, x<0} f(x) = -1$. La fonction f a donc une limite à gauche en 0.

Comme $\lim_{x\to 0, x>0} f(x) \neq \lim_{x\to 0, x<0} f(x)$, la fonction f n'a pas de limite en 0.

---

4. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $E(x) = \sup\{n \in \mathbb{Z};\ n \leq x\}$. On définit f par $f(x) = x - \sqrt{x - E(x)}$ pour tout $x \neq 0$. Soit $n \in \mathbb{Z}$, L'application f a-t-elle une limite en n ? une limite à droite en n ? une limite à gauche en n ?

corrigé

Pour $x \in [n-1, n[$, on a $E(x) = n - 1$ et donc $f(x) = x - \sqrt{x - n + 1}$. On en déduit que $\lim_{x\to n, x<n} f(x) = n - 1$. La fonction f a donc une limite à gauche en n.

Pour $x \in [n, n+1[$, on a $E(x) = n$ et donc $f(x) = x - \sqrt{x - n}$. On en déduit que $\lim_{x\to n, x>n} f(x) = n$. La fonction f a donc une limite à droite en n.

Comme $\lim_{x\to n, x>n} f(x) \neq \lim_{x\to n, x<n} f(x)$, la fonction f n'a pas de limite en n.

Exercice 1.19 (Corrigé de l'exercice 1.13)

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. on suppose qu'il existe $T > 0$ t.q. $f(x + T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (on dit alors que f est périodique de période T). On suppose de plus que f admet une limite finie, notée l, en $+\infty$. Montrer que f est une fonction constante.

corrigé

Soit $x \in \mathbb{R}$, on va montrer que $f(x) = l$. On commence par montrer, par récurrence sur n, que $f(x) = f(x + nT)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. En effet, pour $n = 1$, l'hypothèse sur f donne bien $f(x) = f(x + T)$. Puis, soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On suppose que $f(x) = f(x + nT)$. L'hypothèse sur f, utilisée avec le point $x + nT$, donne $f(x + nT) = f(x + nT + T)$. On en déduit que $f(x) = f(x + (n + 1)T)$. On a bien ainsi montré, par récurrence sur n, que $f(x) = f(x + nT)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

On remarque maintenant que $\lim_{n\to+\infty}(x + nT) = +\infty$. Comme f admet l comme limite en $+\infty$, on a donc $\lim_{n\to+\infty} f(x + nT) = l$, et donc $f(x) = l$. Ce qui prouve que f est la fonction constante et égale à l.

Exercice 1.20 (Corrigé de l'exercice 1.14)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$?

corrigé

La fonction f n'a pas de limite en $+\infty$. En effet, supposons que f ait une limite en $+\infty$, notée l (avec $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$). Toute suite convergeant vers $+\infty$ est alors transformée en une suite ayant l pour limite. En prenant la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $x_n = 2n\pi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que $l = 0$. Puis, en prenant la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $y_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, on en déduit que $l = 1$. Ceci prouve que f n'a pas de limite en $+\infty$.

Une autre démonstration possible consiste à utiliser l'exercice 1.19.