3.4.5 Exercices (optimisation avec contraintes)

Exercice 125 (Sur l'existence et l'unicité). *Corrigé en page 268*
Etudier l'existence et l'unicité des solutions du problème (3.48), avec les données suivantes : $E = \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = x^2$, et pour les quatre différents ensembles K suivants :

$$\begin{array}{llll} (i) & K = \{|x| \leq 1\}\ ; & (ii) & K = \{|x| = 1\} \\ (iii) & K = \{|x| \geq 1\}\ ; & (iv) & K = \{|x| > 1\}. \end{array} \tag{3.55}$$

Exercice 126 (Aire maximale d'un rectangle à périmètre donné). *Corrigé en page 268*

1. On cherche à maximiser l'aire d'un rectangle de périmètre donné égal à 2. Montrer que ce problème peut se formuler comme un problème de minimisation de la forme (3.48), où K est de la forme $K = \{x \in \mathbb{R}^2; g(x) = 0\}$. On donnera f et g de manière explicite.
2. Montrer que le problème de minimisation ainsi obtenu est équivalent au problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)^t \in \tilde{K} \\ f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \leq f(x_1, x_2), \quad \forall\, (x_1, x_2)^t \in \tilde{K}, \end{array} \right. \tag{3.56}$$

   où $\tilde{K} = K \cap [0,1]^2$, K et f étant obtenus à la question 1. En déduire que le problème de minimisation de l'aire admet au moins une solution.
3. Calculer $Dg(x)$ pour $x \in K$ et en déduire que si x est solution de (3.56) alors $x = (1/2, 1/2)$. En déduire que le problème (3.56) admet une unique solution donnée par $\bar{x} = (1/2, 1/2)$.

Exercice 127 (Fonctionnelle quadratique). *Suggestions en page 244, corrigé en page 269*
Soit f une fonction quadratique, *i.e.* $f(x) = \frac{1}{2}Ax \cdot x - b \cdot x$, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique définie positive et $b \in \mathbb{R}^n$. On suppose que la contrainte g est une fonction linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $g(x) = d \cdot x - c$ où $c \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}^n$, et que $d \neq 0$. On pose $K = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \ g(x) = 0\}$ et on cherche à résoudre le problème de minimisation (3.48).

1. Montrer que l'ensemble K est non vide, fermé et convexe. En déduire que le problème (3.48) admet une unique solution.
2. Montrer que si $\bar{x}$ est solution de (3.48), alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = (\bar{x}, \lambda)^t$ soit l'unique solution du système :

$$\left[\begin{array}{c|c} A & d \\ \hline d^t & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \bar{x} \\ \hline \lambda \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} b \\ \hline c \end{array} \right] \tag{3.57}$$

Exercice 128 (Minimisation sans dérivabilité).
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice s.d.p., $b \in \mathbb{R}^n$, $j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue et convexe, à valeurs positives ou nulles (mais non nécessairement dérivable, par exemple $j(v) = \sum_{j=1}^n \alpha_i |v_i|$, avec $\alpha_i \geq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$). Soit U une partie non vide, fermée convexe de $\mathbb{R}^n$. Pour $v \in \mathbb{R}^n$, on pose $J(v) = (1/2)Av \cdot v - b \cdot v + j(v)$.

1. Montrer qu'il existe un et un seul u tel que :

$$u \in U,\ J(u) \leq J(v),\ \forall v \in U. \tag{3.58}$$

2. Soit $u \in U$, montrer que u est solution de (3.58) si et seulement si $(Au - b) \cdot (v - u) + j(v) - j(u) \geq 0$, pour tout $v \in U$.

Exercice 129 (Utilisation du théorème de Lagrange).

1. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose : $f(x, y) = -y$, $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Chercher le(s) point(s) où f atteint son maximum ou son minimum sous la contrainte $g = 0$.

2. Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose : $f(x) = \sum_{i=1}^n |x_i - a_i|^2$, $g(x) = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$. Chercher le(s) point(s) où f atteint son maximum ou son minimum sous la contrainte $g = 1$.
3. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s.d.p. et $b \in \mathbb{R}^n$. Pour $v \in \mathbb{R}^n$, on pose $f(v) = (1/2)Av \cdot v - b \cdot v$ et $g(v) = Bv \cdot v$. Peut-on appliquer le théorème de Lagrange et quelle condition donne-t-il sur u si $f(u) = \min\{f(v), v \in K\}$ avec $K = \{v \in \mathbb{R}^n; g(v) = 1\}$?

Exercice 130 (Contre exemple aux multiplicateurs de Lagrange)**.**
Soient f et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définies par : $f(x, y) = y$, et $g(x, y) = y^3 - x^2$. On pose $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; g(x, y) = 0\}$.

1. Calculer le minimum de f sur K et le point $(\overline{x}, \overline{y})$ où ce minimum est atteint.
2. Existe-t-il λ tel que $Df(\overline{x}, \overline{y}) = \lambda Dg(\overline{x}, \overline{y})$?
3. Pourquoi ne peut-on pas appliquer le théorème des multiplicateurs de Lagrange ?
4. Que trouve-t-on lorsqu'on applique la méthode dite “de Lagrange" pour trouver $(\overline{x}, \overline{y})$?

Exercice 131 (Application simple du théorème de Kuhn-Tucker)**.** *Corrigé en page 269*
Soit f la fonction définie de $E = \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + y^2$ et $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y \geq 1\}$. Justifier l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.48) et appliquer le théorème de Kuhn-Tucker pour la détermination de cette solution.

Exercice 132 (Exemple d'opérateur de projection)**.** *Correction en page 270*

1. Soit $K = C^+ = \{x \in \mathbb{R}^n,\ x = (x_1, \dots, x_k)^t,\ x_i \geq 0,\ \forall i = 1, \dots, N\}$.
   (a) Montrer que K est un convexe fermé non vide.
   (b) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, on a : $(p_K(y))_i = \max(y_i, 0)$.
2. Soit $(\alpha_i)_{i=1,\dots,n} \subset \mathbb{R}^n$ et $(\beta_i)_{i=1,\dots,n} \subset \mathbb{R}^n$ tels que $\alpha_i \leq \beta_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Soit $K = \{x = (x_1, \dots, x_n)^t; \alpha_i \leq \beta_i, i = 1, \dots, n\}$.
   (a) Montrer que K est un convexe fermé non vide.
   (b) Soit p_K l'opérateur de projection définie à la proposition 3.40 page 270. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, on a :
$$(p_K(y))_i = \max(\alpha_i, \min(y_i, \beta_i)), \quad \forall i = 1, \dots, n.$$