1.4.5 Exercices (normes et conditionnement)

Exercice 32 (Normes de l'Identité). *Corrigé en page 82*

Soit Id la matrice "Identité" de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour toute norme induite on a $\|Id\| = 1$ et que pour toute norme matricielle on a $\|Id\| \geq 1$.

Exercice 33 (Normes induites particulières). *Suggestions en page 81, corrigé détaillé en page 82.*

Soit $A = (a_{i,j})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme induite correspondante, notée aussi $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que
$$\|A\|_\infty = \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|.$$
2. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|_1$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme induite correspondante, notée aussi $\|\cdot\|_1$. Montrer que
$$\|A\|_1 = \max_{j\in\{1,\ldots,n\}} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

Exercice 34 (Norme non induite). *Corrigé en page 83*

Pour $A = (a_{i,j})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\|A\|_s = (\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^2)^{\frac{1}{2}}$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_s$ est une norme matricielle mais n'est pas une norme induite (pour $n > 1$).
2. Montrer que $\|A\|_s^2 = tr(A^t A)$. En déduire que $\|A\|_2 \leq \|A\|_s \leq \sqrt{n}\|A\|_2$ et que $\|Ax\|_2 \leq \|A\|_s\|x\|_2$, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$.
3. Chercher un exemple de norme non matricielle.

Exercice 35 (Valeurs propres d'un produit de matrices). *Corrigé en page 83*

Soient p et n des entiers naturels non nuls tels que $n \leq p$, et soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. (On rappelle que $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes.)

1. Montrer que λ est valeur propre non nulle de AB si et seulement si λ est valeur propre non nulle de BA.
2. Montrer que si 0 est valeur propre de AB alors 0 est valeur propre de BA. *(Il est conseillé de distinguer les cas $Bx \neq 0$ et $Bx = 0$, où x est un vecteur propre associé à la valeur propre nulle de AB. Pour le deuxième cas, on pourra distinguer selon que $ImA = \mathbb{R}^n$ ou non.)*
3. Montrer en donnant un exemple que 0 peut être une valeur propre de BA sans être valeur propre de AB. *(Prendre par exemple $n = 1$, $p = 2$.)*
4. On suppose maintenant que $n = p$, déduire des questions 1 et 2 que l'ensemble des valeurs propres de AB est égal à l'ensemble des valeurs propres de la matrice BA.

Exercice 36 (Rayon spectral). *Corrigé en page 83.*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A est diagonalisable, il existe une norme induite sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\rho(A) = \|A\|$. Montrer par un contre exemple que ceci peut être faux si A n'est pas diagonalisable.

Exercice 37 (Sur le rayon spectral). *Corrigé en page 83*

On définit les matrices carrées d'ordre 2 suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},\ C = A + B.$$

Calculer le rayon spectral de chacune des matrices A, B et C et en déduire que le rayon spectral ne peut être ni une norme, ni même une semi-norme sur l'espace vectoriel des matrices.

Exercice 38 (Série de Neumann). *Suggestions en page 81, corrigé détaillé en page 84.*

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si $\rho(A) < 1$, les matrices $Id - A$ et $Id + A$ sont inversibles.

2. Montrer que la série de terme général A^k converge (vers $(Id - A)^{-1}$) si et seulement si $\rho(A) < 1$.

3. Montrer que si $\rho(A) < 1$, et si $\|\cdot\|$ une norme matricielle telle que $\|A\| < 1$, alors $\|(Id - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$ et $\|(Id + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$.

Exercice 39 (Normes induites). *Corrigé en page 84*

Soit $\|.\|$ une norme induite sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$, et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\rho(A) < 1$ (on rappelle qu'on note $\rho(A)$ le rayon spectral de la matrice A). Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on définit $\|x\|_*$ par :

$$\|x\|_* = \sum_{j=0}^{\infty} \|A^j x\|.$$

1. Montrer que l'application définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \|x\|_*$ est une norme.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\|_* = 1$. Calculer $\|Ax\|_*$ en fonction de $\|x\|$, et en déduire que $\|A\|_* < 1$.
3. On ne suppose plus que $\rho(A) < 1$. Soit $\varepsilon > 0$ donné. Construire à partir de la norme $\|.\|$ une norme induite $\|.\|_{**}$ telle que $\|A\|_{**} \leq \rho(A) + \varepsilon$.

Exercice 40 (Calcul de conditionnement). *Corrigé détaillé en page 86.*
Calculer le conditionnement pour la norme 2 de la matrice $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercice 41 (Propriétés générales du conditionnement). *Corrigé détaillé en page 87.*
On suppose que $\mathbb{R}^n$ est muni de la norme euclidienne usuelle $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme induite (notée aussi $\|\cdot\|_2$. On note alors $\mathrm{cond}_2(A)$ le conditionnement d'une matrice A inversible.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Montrer que $\mathrm{cond}_2(A) = 1$ si et seulement si $A = \alpha Q$ où $\alpha \in \mathbb{R}^\star$ et Q est une matrice orthogonale (c'est-à-dire $Q^t = Q^{-1}$).
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. On suppose que $A = QR$ où Q est une matrice orthogonale. Montrer que $\mathrm{cond}_2(A) = \mathrm{cond}_2(R)$.
3. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques définies positives. Montrer que

$$\mathrm{cond}_2(A + B) \leq \max\{\mathrm{cond}_2(A), \mathrm{cond}_2(B)\}.$$

Exercice 42 (Conditionnement de la matrice transposée). *Corrigé en page 88*
On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible.

1. Montrer que si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\det(AB - \lambda Id) = \det(BA - \lambda Id)$.
2. En déduire que les rayons spectraux des deux matrices AB et BA sont identiques.
3. Montrer que $\|A^t\|_2 = \|A\|_2$.
4. En déduire que $\mathrm{cond}_2(A) = \mathrm{cond}_2(A^t)$.
5. A-t-on $\|A^t\|_1 = \|A\|_1$?
6. Montrer que dans le cas $n = 2$, on a toujours $\mathrm{cond}_1(A) = \mathrm{cond}_1(A^t), \forall A \in M_2(\mathbb{R})$.
7. Calculer $\mathrm{cond}_1(A)$ pour $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ et conclure.