1.5.4 Exercices (méthodes itératives)

Exercice 55 (Convergence de suites)**.** *Corrigé en page 120*

Etudier la convergence de la suite $(\boldsymbol{x}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ définie par $\boldsymbol{x}^{(0)}$ donné, $\boldsymbol{x}^{(k)} = B\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{c}$ dans les cas suivants :

$$\text{(a)}\quad B = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{(b)}\quad B = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Exercice 56 (Méthode de Richardson)**.** *Suggestions en page 119, corrigé en page 120*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive, $b \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour trouver la solution de $Ax = b$, on considère la méthode itérative suivante :

- Initialisation : $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$,
- Iterations : $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha(b - Ax^{(k)})$.

1. Pour quelles valeurs de α (en fonction des valeurs propres de A) la méthode est-elle convergente ?
2. Calculer α_0 (en fonction des valeurs propres de A) t.q. $\rho(Id - \alpha_0 A) = \min\{\rho(Id - \alpha A), \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Commentaire sur la méthode de Richardson : On peut la voir comme une méthode de gradient à pas fixe pour la minimisation de la fonction f définie de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ par : $\boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}A\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}$, qui sera étudiée au chapitre Optimisation. On verra en effet que grâce qu caractère symétrique définie positif de A, la fonction $\boldsymbol{f}$ admet un unique minimum, caractérisé par l'annulation du gradient de f en ce point. Or $\nabla f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}$, et annuler le gradient consiste à résoudre le système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Exercice 57 (Non convergence de la méthode de Jacobi)**.** *Suggestions en page 119. Corrigé en page 121.*

Soit $a \in \mathbb{R}$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que A est symétrique définie positive si et seulement si $-1/2 < a < 1$ et que la méthode de Jacobi converge si et seulement si $-1/2 < a < 1/2$.

Exercice 58 (Jacobi et Gauss–Seidel : cas des matrices tridiagonales)**.** *Corrigé en page 121.*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre n inversible et tridiagonale ; on note $a_{i,j}$ le coefficient de la ligne i et la ligne j de la matrice A. On décompose en $A = D - E - F$, où D représente la diagonale de la matrice A, $(-E)$ la partie triangulaire inférieure stricte et $(-F)$ la partie triangulaire supérieure stricte.
On note B_J et B_{GS} les matrices d'itération des méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel pour la résolution d'un système linéaire de matrice A.

1. Calculer les matrices B_J et B_{GS} pour la matrice particulère $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ et calculer leurs rayons spectraux.Montrer que les méthodes convergent. Citer les résultats du cours qui s'appliquent pour cette matrice.
2. Montrer que λ est valeur propre de B_J si et seulement s'il existe un vecteur complexe $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots x_n) \in \mathbb{C}^n$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, tel que
$$-a_{p,p-1}x_{p-1} - a_{p,p+1}x_{p+1} = \lambda a_{p,p}x_p, \quad p = 1, \dots, n.$$
avec $x_0 = x_{n+1} = 0$.
3. Soit $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots y_n) \in \mathbb{C}^n$ défini par $y_p = \lambda^p x_p$, où λ est une valeur propre non nulle de B_J et $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ un vecteur propre associé. On pose $y_0 = y_{n+1} = 0$. Montrer que
$$-\lambda^2 a_{p,p-1}y_{p-1} - a_{p,p+1}y_{p+1} = \lambda^2 a_{p,p}y_p, \quad p = 1, \dots, n.$$

4. Montrer que μ est valeur propre de B_{GS} associée à un vecteur propre $\boldsymbol{z} \neq \mathbf{0}$ si et seulement si
$$(F - \mu(D - E))\,\boldsymbol{z} = \mathbf{0}.$$
5. Montrer que λ est valeur propre non nulle de B_J si et seulement si λ^2 est valeur propre de B_{GS}, et en déduire que $\rho(B_{GS}) = \rho(B_J)^2$.
6. On considère la matrice :
$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & 1 & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}$$
Montrer que cette matrice est symétrique définie positive. Montrer que $\rho(B_{GS}) \neq \rho(B_J)^2$. Quelle est l'hypothèse mise en défaut ici ?

Exercice 59 (Méthode de Jacobi et relaxation). *Suggestions en page 119, corrigé en page 127*
Soit $n \geq 1$. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On note D la partie diagonale de A, $-E$ la partie triangulaire inférieure de A et $-F$ la partie triangulaire supérieure de A, c'est-à-dire :
$$\begin{aligned} D &= (d_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n},\ d_{i,j} = 0 \text{ si } i \neq j,\ d_{i,i} = a_{i,i}, \\ E &= (e_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n},\ e_{i,j} = 0 \text{ si } i \leq j,\ e_{i,j} = -a_{i,j} \text{ si } i > j, \\ F &= (f_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n},\ f_{i,j} = 0 \text{ si } i \geq j,\ f_{i,j} = -a_{i,j} \text{ si } i < j. \end{aligned}$$
Noter que $A = D - E - F$. Soit $b \in \mathbb{R}^n$. On cherche à calculer $x \in \mathbb{R}^n$ t.q. $Ax = b$. On suppose que D est définie positive (noter que A n'est pas forcément inversible). On s'intéresse ici à la méthode de Jacobi (par points), c'est–à–dire à la méthode itérative suivante :

Initialisation. $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$
Itérations. Pour $n \in \mathbb{N}$, $Dx^{(k+1)} = (E + F)x^{(k)} + b$.

On pose $J = D^{-1}(E + F)$.

1. Montrer, en donnant un exemple avec $n = 2$, que J peut ne pas être symétrique.
2. Montrer que J est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et, plus précisement, qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$, notée $\{f_1, \ldots, f_n\}$, et il existe $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\} \subset \mathbb{R}$ t.q. $J\boldsymbol{f}_i = \mu_i \boldsymbol{f}_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et t.q. $D\boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{f}_j = \delta_{i,j}$ pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

   En ordonnant les valeurs propres de J, on a donc $\mu_1 \leq \ldots \leq \mu_n$, on conserve cette notation dans la suite.
3. Montrer que la trace de J est nulle et en déduire que $\mu_1 \leq 0$ et $\mu_n \geq 0$.

   On suppose maintenant que A et $2D - A$ sont symétriques définies positives et on pose $x = A^{-1}b$.
4. Montrer que la méthode de Jacobi (par points) converge (c'est-à-dire $x^{(k)} \to x$ quand $n \to \infty$). [Utiliser un théorème du cours.]

   On se propose maintenant d'améliorer la convergence de la méthode par une technique de relaxation. Soit $\omega > 0$, on considère la méthode suivante :
   Initialisation. $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$
   Itérations. Pour $n \in \mathbb{N}$, $D\tilde{x}^{(k+1)} = (E + F)x^{(k)} + b$, $x^{(k+1)} = \omega\tilde{x}^{(k+1)} + (1 - \omega)x^{(k)}$.
5. Calculer les matrices M_ω (inversible) et N_ω telles que $M_\omega x^{(k+1)} = N_\omega x^{(k)} + b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, en fonction de ω, D et A. On note, dans la suite $J_\omega = (M_\omega)^{-1}N_\omega$.
6. On suppose dans cette question que $(2/\omega)D - A$ est symétrique définie positive. Montrer que la méthode converge (c'est-à-dire que $x^{(k)} \to x$ quand $n \to \infty$.)
7. Montrer que $(2/\omega)D - A$ est symétrique définie positive si et seulement si $\omega < 2/(1 - \mu_1)$.
8. Calculer les valeurs propres de J_ω en fonction de celles de J. En déduire, en fonction des μ_i, la valeur "optimale" de ω, c'est-à-dire la valeur de ω minimisant le rayon spectral de J_ω.