2.2.5 Exercices (méthodes de point fixe)

Exercice 76 (Calcul différentiel). *Suggestions en page 163, corrigé détaillé en page 163*

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.
1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique vecteur $a(x) \in \mathbb{R}^n$ tel que $Df(x)(h) = a(x) \cdot h$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$.
Montrer que $(a(x))_i = \partial_i f(x)$.

2. On pose $\nabla f(x) = (\partial_1 f(x), \ldots, \partial_1 f(x))^t$. Soit φ l'application définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ par $\varphi(x) = \nabla f(x)$. Montrer que $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et que $D\varphi(x)(y) = A(x)y$, où $(A(x))_{i,j} = \partial^2_{i,j} f(x)$.

Exercice 77 (Calcul différentiel, suite). *Corrigé en page 164*

1. Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ la fonction définie par $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 + cx_1x_2$, où a, b, et c sont trois réels fixés. Donner la définition et l'expression de $Df(x)$, $\nabla f(x)$,Df, $D^2f(x)$, $H_f(x)$.
2. Même question pour la fonction $f \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ définie par $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1^2 x_2 + x_2 \sin(x_3)$.

Exercice 78 (Point fixe dans $\mathbb{R}$). *Corrigé en page 164*

1. Etudier la convergence de la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$, définie par $x^{(0)} \in [0, 1]$ et $x^{(k+1)} = \cos\left(\dfrac{1}{1 + x^{(k)}}\right)$.
2. Soit $I = [0, 1]$, et $f : x \mapsto x^4$. Montrer que la suite des itérés de point fixe converge pour tout $x \in [0, 1]$ et donner la limite de la suite en fonction du choix initial $x^{(0)}$.

Exercice 79 (Point fixe et Newton). *Corrigé détaillé en page 165.*

1. On veut résoudre l'équation $2xe^x = 1$.
   (a) Vérifier que cette équation peut s'écrire sous forme de point fixe : $x = \frac{1}{2}e^{-x}$.
   (b) Ecrire l'algorithme de point fixe, et calculer les itérés x_0, x_1, x_2 et x_3 en partant depuis $x_0 = 1$.
   (c) Justifier la convergence de l'algorithme donné en (b).
2. On veut résoudre l'équation $x^2 - 2 = 0$, $x > 0$.
   (a) Vérifier que cette équation peut s'écrire sous forme de point fixe : $x = \frac{2}{x}$.
   (b) Ecrire l'algorithme de point fixe, et tracer sur un graphique les itérés x_0, x_1, x_2 et x_3 en partant de $x_0 = 1$ et $x_0 = 2$.
   (c) Essayer ensuite le point fixe sur $x = \frac{x^2+2}{2x}$. Pas très facile à deviner, n'est ce pas ?
   (d) Pour suivre les traces de Newton (ou plutôt Simpson, semble-t-il) : à x_n connu, écrire le développement limité de $g(x) = x^2 - 2$ entre $x^{(n)}$ et $x^{(n+1)}$, remplacer l'équation $g(\overline{x}) = 0$ par $g(x^{(n+1)}) = 0$, et $g(x^{(n+1)})$ par le développement limité en x^{n+1} , et en déduire l'approximation $x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{g(x^{(n)})}{g'(x^{(n)})}$. Retrouver ainsi l'itération de la question précédente (pour $g(x) = x^2 - 2$).

Exercice 80 (Méthode de monotonie). *Suggestions en page 163, corrigé détaillé en page 166.*

On suppose que $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f(0) = 0$ et que f est croissante. On s'intéresse, pour $\lambda > 0$, au système non linéaire suivant de n équations à n inconnues (notées $u_1, \ldots, u_n$) :

$$\begin{aligned} &(Au)_i = \alpha_i f(u_i) + \lambda b_i \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \\ &u = (u_1, \ldots, u_n)^t \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{2.11}$$

où $\alpha_i > 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $b_i \geq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice vérifiant

$$u \in \mathbb{R}^n, \ Au \geq 0 \Rightarrow u \geq 0. \tag{2.12}$$

On suppose qu'il existe $\mu > 0$ t.q. (2.11) ait une solution, notée $u^{(\mu)}$, pour $\lambda = \mu$. On suppose aussi que $u^{(\mu)} \geq 0$.

Soit $0 < \lambda < \mu$. On définit la suite $(v^{(k)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ par $v^{(0)} = 0$ et, pour $n \geq 0$,

$$(Av^{(k+1)})_i = \alpha_i f(v_i^{(k)}) + \lambda b_i \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{2.13}$$

Montrer que la suite $(v^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, convergente (dans $\mathbb{R}^n$) et que sa limite, notée $u^{(\lambda)}$, est solution de (2.11) (et vérifie $0 \leq u^{(\lambda)} \leq u^{(\mu)}$).

Exercice 81 (Point fixe amélioré)**.** *Suggestions en page 163, Corrigé en page 166*

Soit $g \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\overline{x} \in \mathbb{R}$ tels que $g(\overline{x}) = 0$ et $g'(\overline{x}) \neq 0$.
On se donne $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\varphi(\overline{x}) = \overline{x}$.
On considère l'algorithme suivant :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}, \\ x_{n+1} = h(x_n), n \geq 0. \end{cases} \tag{2.14}$$

avec $h(x) = x - \dfrac{g(x)}{g'(\varphi(x))}$
1) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $x_0 \in [\overline{x} - \alpha, \overline{x} + \alpha] = I_\alpha$, alors la suite donnée par l'algorithme (2.14) est bien définie ; montrer que $x_n \to \overline{x}$ lorsque $n \to +\infty$.

On prend maintenant $x_0 \in I_\alpha$ où α est donné par la question 1.
2) Montrer que la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par l'algorithme (2.14) est au moins quadratique.
3) On suppose que φ' est lipschitzienne et que $\varphi'(\overline{x}) = \dfrac{1}{2}$. Montrer que la convergence de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par (2.14) est au moins cubique, c'est-à-dire qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$|x_{k+1} - \overline{x}| \leq c|x_k - \overline{x}|^3, \qquad \forall k \geq 1.$$

4) Soit $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I_\beta =]\overline{x} - \beta, \overline{x} + \beta[$; montrer que si on prend φ telle que :

$$\varphi(x) = x - \frac{g(x)}{2g'(x)} \qquad \text{si } x \in I_\beta,$$

alors la suite définie par l'algorithme (2.14) converge de manière cubique.