2.3.3 Exercices (méthode de Newton)

Exercice 82 (Newton et logarithme)**.** *Suggestions en page 183 Corrigé en page 184*
Soit f la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(x)$. Montrer que la méthode de Newton pour la recherche de $\overline{x}$ tel que $f(\overline{x}) = 0$ converge si et seulement si le choix initial $x^{(0)}$ est tel que $x^{(0)} \in]0, e[$.

Exercice 83 (Newton pour un système linéaire)**.** *Corrigé en page 184* Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^n$ par $f(x) = Ax - b$ où A est une matrice inversible et $b \in \mathbb{R}^n$. Ecrire l'algorithme de Newton pour la résolution de l'équation $f(x) = 0$ et montrer qu'il converge pour toute condition initiale $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 84 (Condition initiale et Newton)**.** *Corrigé en page 184* L'algorithme de Newton pour $F(x, y) = (\sin(x) + y, xy)^t$ est-il bien défini pour la condition initiale $(\frac{\pi}{2}, 0)$?

Exercice 85 (Newton dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$)**.** *Corrigé en page 184* Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $|a| < 1$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On définit l'application

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} x - x_0 - ay \\ y - y_0 - a \sin x \end{bmatrix} \end{aligned}$$

.

1. Montrer qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que l'on déterminera, telle que $F(x, y) = (0, 0)$ si et seulement si $x = x_0 + ay$ et $f(y) = 0$.
2. Montrer que pour tout triplet (a, x_0, y_0), il existe un unique couple $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ tel que $F(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$.
3. Ecrire l'algorithme de Newton pour f et montrer que l'algorithme de Newton converge au voisinage de $\bar{y}$.
4. Ecrire l'algorithme de Newton pour la fonction F. Montrer que l'algorithme converge au voisinage de $(\bar{x}, \bar{y})$.

Exercice 86 (Méthode de Newton pour un système 2×2)**.** *Corrigé en page 185*

1. Ecrire la méthode de Newton pour la résolution du système suivant :

$$-5x + 2\sin x + 2\cos y = 0, \tag{2.33}$$
$$2\cos x + 2\sin y - 5y = 0. \tag{2.34}$$

et montrer que la suite définie par cet algorithme est toujours bien définie.

2. Soit $(\overline{x}, \overline{y})$ une solution du problème (2.33)-(2.34). Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que si (x_0, y_0) est dans la boule B_ε de centre $(\overline{x}, \overline{y})$ et de rayon ε, alors la suite $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ construite par la méthode de Newton converge vers $(\overline{x}, \overline{y})$ lorsque n tends vers $+\infty$.

3. Montrer qu'il existe au moins une solution $(\overline{x}, \overline{y})$ au problème (2.33)-(2.34).

Exercice 87 (Méthode de Newton pour un autre système 2×2)**.**

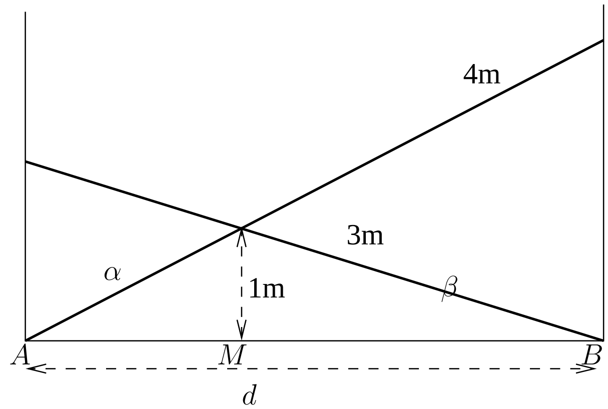
1. Ecrire la méthode de Newton pour la résolution du système suivant :

$$x^2 + 2xy = 0, \tag{2.35}$$
$$xy + 1 = 0. \tag{2.36}$$

2. Calculer les solutions de ce système.
3. Soit $(\overline{x}, \overline{y})$ une solution du problème (2.35)-(2.36). Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que si (x_0, y_0) est dans la boule B_ε de centre $(\overline{x}, \overline{y})$ et de rayon ε, alors la suite $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ construite par la méthode de Newton converge vers $(\overline{x}, \overline{y})$ lorsque n tends vers $+\infty$.

Exercice 88 (Newton et les échelles…)**.** *Corrigé en page 2.3.3 page 186*

Soient deux échelles de longueurs respectives 3 et 4 m, posées contre deux murs verticaux selon la figure ci-contre. On sait que les échelles se croisent à 1m du sol, et on cherche à connaître la distance d entre les deux murs.



1. Montrer que le problème revient à déterminer x et y tels que

$$16x^2 = (x^2+1)(x+y)^2 \tag{2.37}$$

$$9y^2 = (y^2+1)(x+y)^2. \tag{2.38}$$

2. Ecrire l'algorithme de Newton pour la résolution du système (2.37)-(2.38).

3. Calculer les premiers itérés $x^{(1)}$ et $y^{(1)}$ construits par la méthode de Newton en partant de $x^{(0)} = 1$ et $y^{(0)} = 1$.

Exercice 89 (Newton dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$)**.** *Corrigé en page 186*

On considère l'application $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(X) = X^2 - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. L'objectif de cet exercice est de trouver les solutions de $f(X) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

1. Réécrire l'application f comme une application F de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$.
2. Trouver l'ensemble des solutions de $f(X) = 0$.
3. Ecrire le premier itéré X_1 de l'algorithme de Newton pour l'application f partant de la donnée initiale $X_0 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ (On pourra passer par l'application F). Montrer que la suite $(X_k)_k$ définie par cet algorithme est définie par tout k et que l'on peut écrire sous la forme $X_k = \lambda_k \mathrm{Id}$ où $(\lambda_k)_k$ est une suite réelle dont on étudiera la convergence.
4. L'algorithme de Newton converge-t-il au voisinage de $X_* = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$?

Exercice 90 (Recherche d'un point fixe)**.**
On définit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{(x^2)} - 4x^2$.

1. Montrer que f s'annule en 4 points de $\mathbb{R}$ et qu'un seul de ces points est entre 0 et 1.
2. On pose $g(x) = (1/2)\sqrt{e^{(x^2)}}$ (pour x dans $\mathbb{R}$).
   Montrer que la méthode du point fixe appliquée à g, initialisée avec un point de l'intervalle $]0,1[$, est convergente et converge vers le point de $]0,1[$ annulant f.
   Quel est l'ordre de convergence de cette méthode ?
3. Donner la méthode de Newton pour rechercher les points annulant f.
   Entre cette méthode et la méthode de la question précédente, quelle méthode vous semble *a priori* la plus efficace ?