Exercice 93 (Méthode de Newton pour le calcul de l'inverse)**.** *Corrigé en page 189*

1. Soit $a > 0$. On cherche à calculer $\dfrac{1}{a}$ par l'algorithme de Newton.
   (a) Montrer que l'algorithme de Newton appliqué à une fonction g (dont $\frac{1}{a}$ est un zéro) bien choisie s'écrit :
   $$\left\{\begin{array}{l} x^{(0)} \text{ donné}, \\ x^{(k+1)} = x^{(k)}(2 - ax^{(k)}). \end{array}\right. \tag{2.39}$$
   (b) Montrer que la suite $(x^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ définie par (2.39) vérifie
   $$\lim_{n\to+\infty} x^{(k)} = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{a} \text{ si } x^{(0)} \in]0, \dfrac{2}{a}[, \\ -\infty \text{ si } x^{(0)} \in]-\infty, 0[\cup]\dfrac{2}{a}, +\infty[\end{array}\right.$$
2. On cherche maintenant à calculer l'inverse d'une matrice par la méthode de Newton. Soit donc A une matrice carrée d'ordre n inversible, dont on cherche à calculer l'inverse.
   (a) Montrer que l'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées inversibles d'ordre n (où $n \geq 1$) est un ouvert de l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n.
   (b) Soit T l'application définie de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $GL_n(\mathbb{R})$ par $T(B) = B^{-1}$. Montrer que T est dérivable, et que $DT(B)H = -B^{-1}HB^{-1}$.
   (c) Ecrire la méthode de Newton pour calculer A^{-1} en cherchant le zéro de la fonction g de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par$g(B) = B^{-1} - A$. Soit $B^{(k)}$ la suite ainsi définie.
   (d) Montrer que la suite $B^{(k)}$ définie dans la question précédente vérifie :
   $$\mathrm{Id} - AB^{(k+1)} = (\mathrm{Id} - AB^{(k)})^2.$$
   En déduire que la suite $(B^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers A^{-1} si et seulement si $\rho(\mathrm{Id} - AB^{(0)}) < 1$.

Exercice 94 (Méthode de Newton pour le calcul de la racine)**.** *Suggestions en page 183, corrigé en page 190*

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et f_λ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_\lambda(x) = x^2 - \lambda$.
   1.1 Soit $x^{(0)} \in \mathbb{R}$ fixé. Donner l'algorithme de Newton pour la résolution de l'équation $f_\lambda(x) = 0$.
   1.2 On suppose $x^{(0)} > 0$.
      (i) Montrer que la suite $(x^{(k)})_{k\geq 1}$ est minorée par $\sqrt{\lambda}$.
      (ii) Montrer que la suite $(x^{(k)})_{k\geq 0}$ converge et donner sa limite.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable dans $\mathbb{R}$; on note $\lambda_i, i = 1, \ldots, n$ les valeurs propres de A. On suppose que $\lambda_i > 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.

2. Montrer qu'il existe au moins une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$. Calculer une telle matrice B dans le cas où $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
3. On suppose de plus que A est symétrique définie positive. Montrer qu'il existe une unique matrice symétrique définie positive B telle que $B^2 = A$. Montrer par un contre exemple que l'unicité n'est pas vérifiée si on ne demande pas que B soit symétrique définie positive.

Soit F l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $F(X) = X^2 - A$.

4. Montrer que F est différentiable en tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et déterminer $DF(X)H$ pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans la suite de l'exercice, on considère la méthode de Newton pour déterminer B.

5. On suppose maintenant $n \geq 1$. On note $(X^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ la suite (si elle existe) donnée par l'algorithme de Newton à partir d'un choix initial $X^{(0)} = I$, où I est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

5.1 Donner le procédé de construction de $X^{(k+1)}$ en fonction de $X^{(k)}$, pour $k \geq 0$.

5.2 On note $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A (dont certaines peuvent être égales) et P la matrice orthogonale telle que $A = P\text{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)P^{-1}$.

(i) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X^{(k)}$ est bien définie et est donné par

$$X^{(k)} = P\text{diag}(\mu_1^{(k)}, \cdots, \mu_n^{(k)})P^{-1},$$

où $\mu_i^{(k)}$ est le $k^{ième}$ terme de la suite de Newton pour la résolution de $f_{\lambda_i}(x) = (x - \lambda_i)^2 = 0$ avec comme choix initial $\mu_i^{(0)} = 1$.

(ii) En déduire que la suite $X^{(k)}$ converge vers B quand $k \to +\infty$.

Exercice 95 (Valeurs propres et méthode de Newton)**.**
Suggestions en page 183, corrigé détaillé en page 194

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Soient $\overline{\lambda}$ une valeur propre simple de A et $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre associé t.q. $\overline{x} \cdot \overline{x} = 1$. Pour calculer $(\overline{\lambda}, \overline{x})$ on applique la méthode de Newton au système non linéaire (de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$) suivant :

$$\begin{aligned} Ax - \lambda x &= 0, \\ x \cdot x &= 1. \end{aligned}$$

Montrer que la méthode est localement convergente.

Exercice 96 (Modification de la méthode de Newton)**.** *Suggestions en page 183. Corrigé en page 195*

Soient $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ t.q. $f(\overline{x}) = 0$. On considère, pour $\lambda > 0$ donné, la méthode itérative suivante :

— Initialisation : $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

— Iterations : pour $k \geq 0$,

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [Df(x^{(k)})^t Df(x^{(k)}) + \lambda Id]^{-1} Df(x^{(k)})^t f(x^{(k)}).$$

[Noter que, pour $\lambda = 0$, on retrouve la méthode de Newton.]

1. Montrer que la suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ est bien définie.
2. On suppose, dans cette question, que $n = 1$ et que $f'(\overline{x}) \neq 0$. Montrer que la méthode est localement convergente en $\overline{x}$.
3. On suppose que le rang de $Df(\overline{x})$ est égal à n. Montrer que la méthode est localement convergente en $\overline{x}$. [Noter que cette question redonne la question précédente si $n = 1$.]

Exercice 97 (Méthode de Newton pour un système semi-linéaire)**.** *Suggestions en page 184. Corrigé en page 201*
On suppose que $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que f est croissante. On s'intéresse au système non linéaire suivant de n équations à n inconnues (notées $u_1, \ldots, u_n$) :

$$\begin{aligned} &(Au)_i + \alpha_i f(u_i) = b_i \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \\ &u = (u_1, \ldots, u_n)^t \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{2.40}$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique définie positive, $\alpha_i > 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $b_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

On admet que (2.40) admet au moins une solution (ceci peut être démontré mais est difficile).

1. Montrer que (2.40) admet une unique solution.
2. Soit u la solution de (2.40). Montrer qu'il existe $a > 0$ t.q. la méthode de Newton pour approcher la solution de (2.40) converge lorsque le point de départ de la méthode, noté $u^{(0)}$, vérifie $|u - u^{(0)}| < a$.